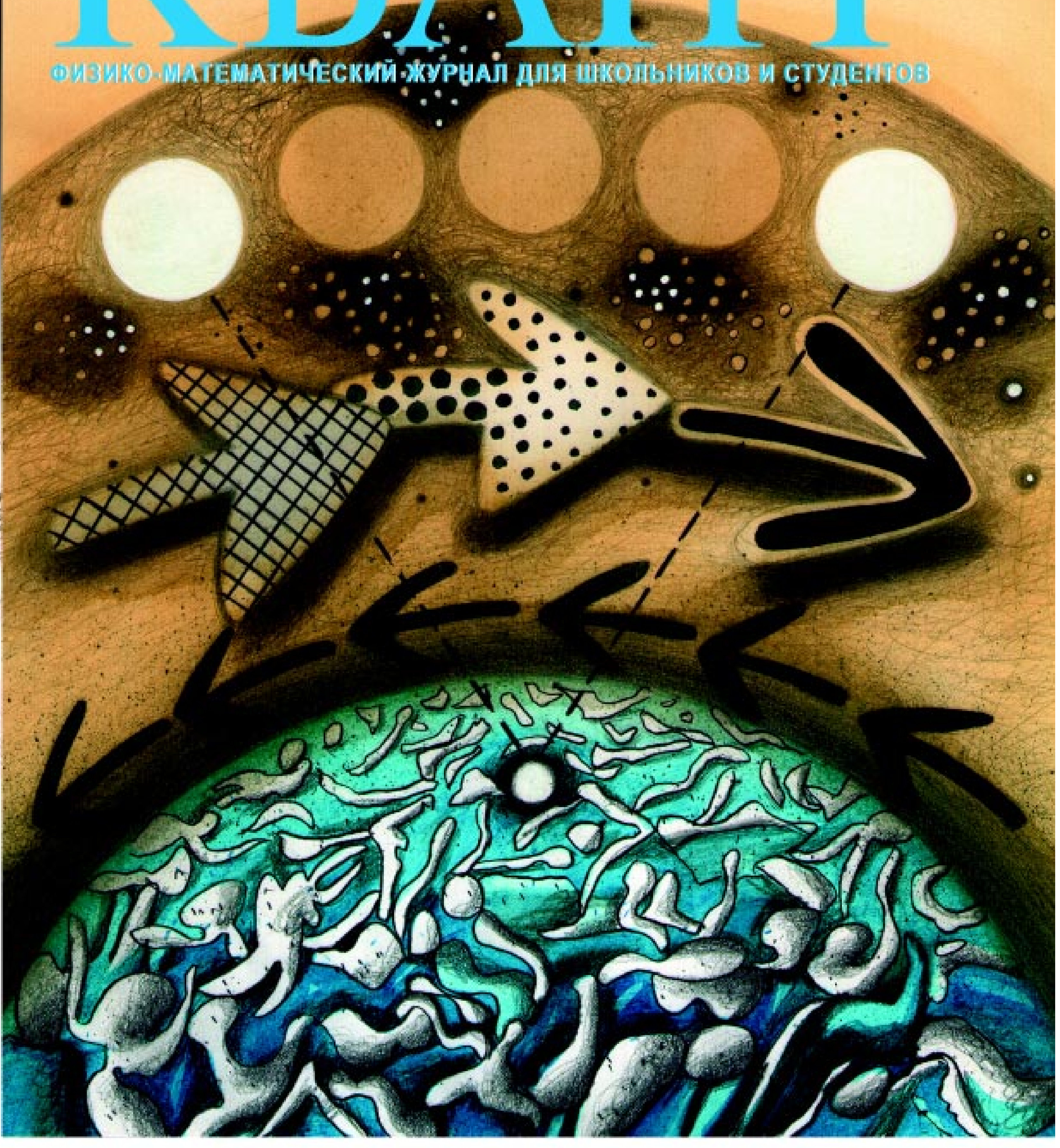
ISSN 0130-2221
НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ 2005 · №6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Немецкий изобретатель Маркус Гётс назвал эту головоломку "Берегись опасности". Опасность в ней только одна – запутаться в шнурках, пытаясь решить поставленную изобретателем задачу: освободить темное колечко.

Сделать эту игрушку не представляет труда, при этом возможны варианты. Вертикальную деревянную стойку можно заменить петлей из толстой проволоки, вместо шайбы и двух колец использовать три одинаковых кольца для штор, а шарик взять от настольного тенниса. Диаметр шарика должен быть меньше внутреннего диаметра колец и больше ширины щели в вертикальной стойке. Через щель должны свободно проходить кольца, но не шарик. Размеры шнурков особого значения не имеют, лишь бы они не были слишком короткими. Один из двух шариков, которые вы видите на фотографии, – лишний. Видимо, изобретатель добавил светлый шарик для запутывания (или запугивания) любителей головоломок.

И сделал это зря - игрушка и так очень трудная в решении. Кроме того, наличие в головоломке деталей, не используемых в процессе решения, считается некорректным.

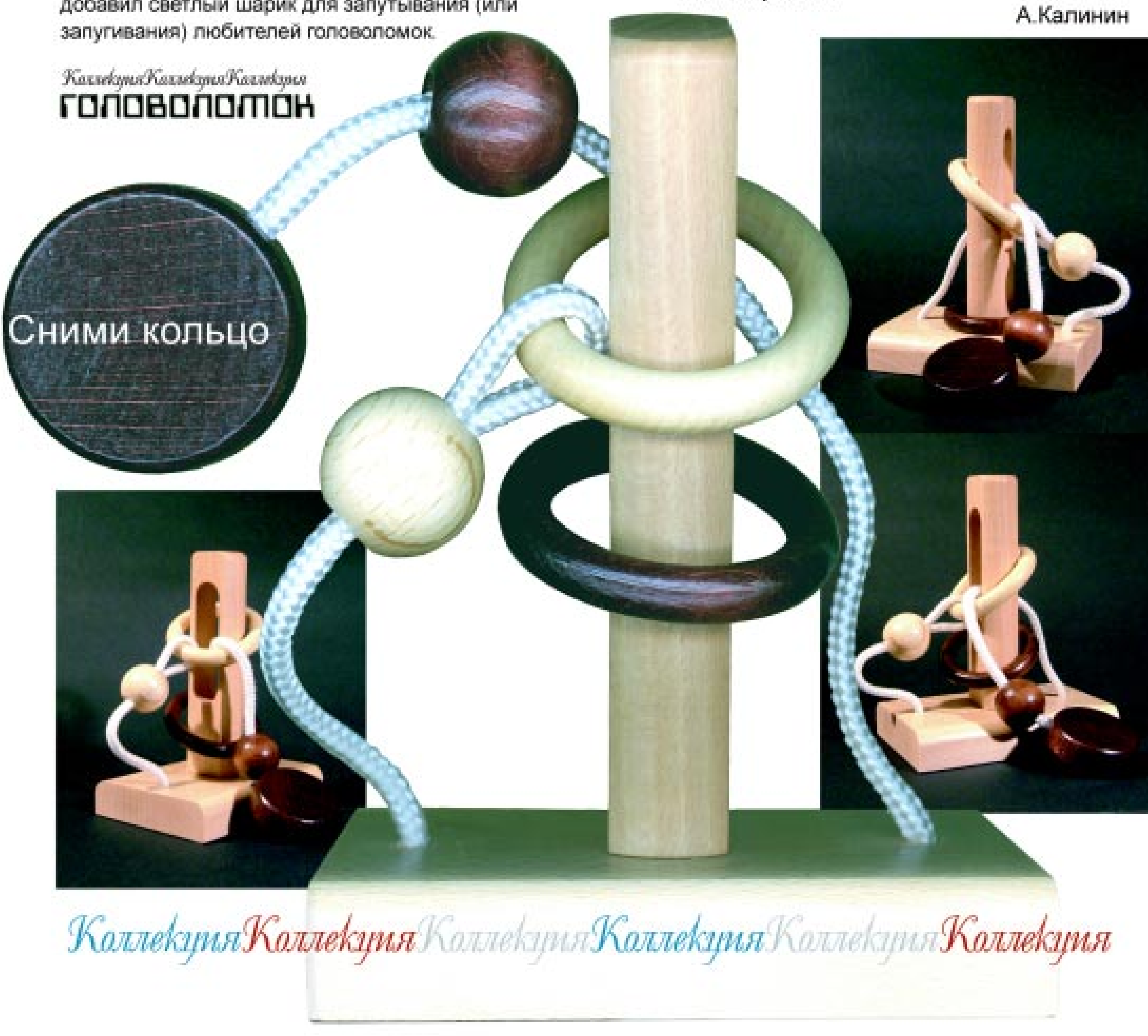
Самостоятельно эту головоломку смогут решить те читатели, которые знакомы со шнурковыми головоломками, опубликованными в прошлых номерах журнала. Для новичков расскажем о первых шагах решения.

Начните с того, что проденьте шайбу через щель стойки и переместите светлое кольцо вплотную к шайбе. Затем проведите его через щель стойки, а шарик проденьте внутрь кольца. Теперь у вас появилась возможность снять темное кольцо со стойки. Далее используются примерно те же манипуляции, что и на первом этапе.

Желаем успеха.

А.Калинин

КоллекцияКоллекцияКоллекция
ГОЛОВОЛОМОК



журнал© **Квант** НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2005 №6

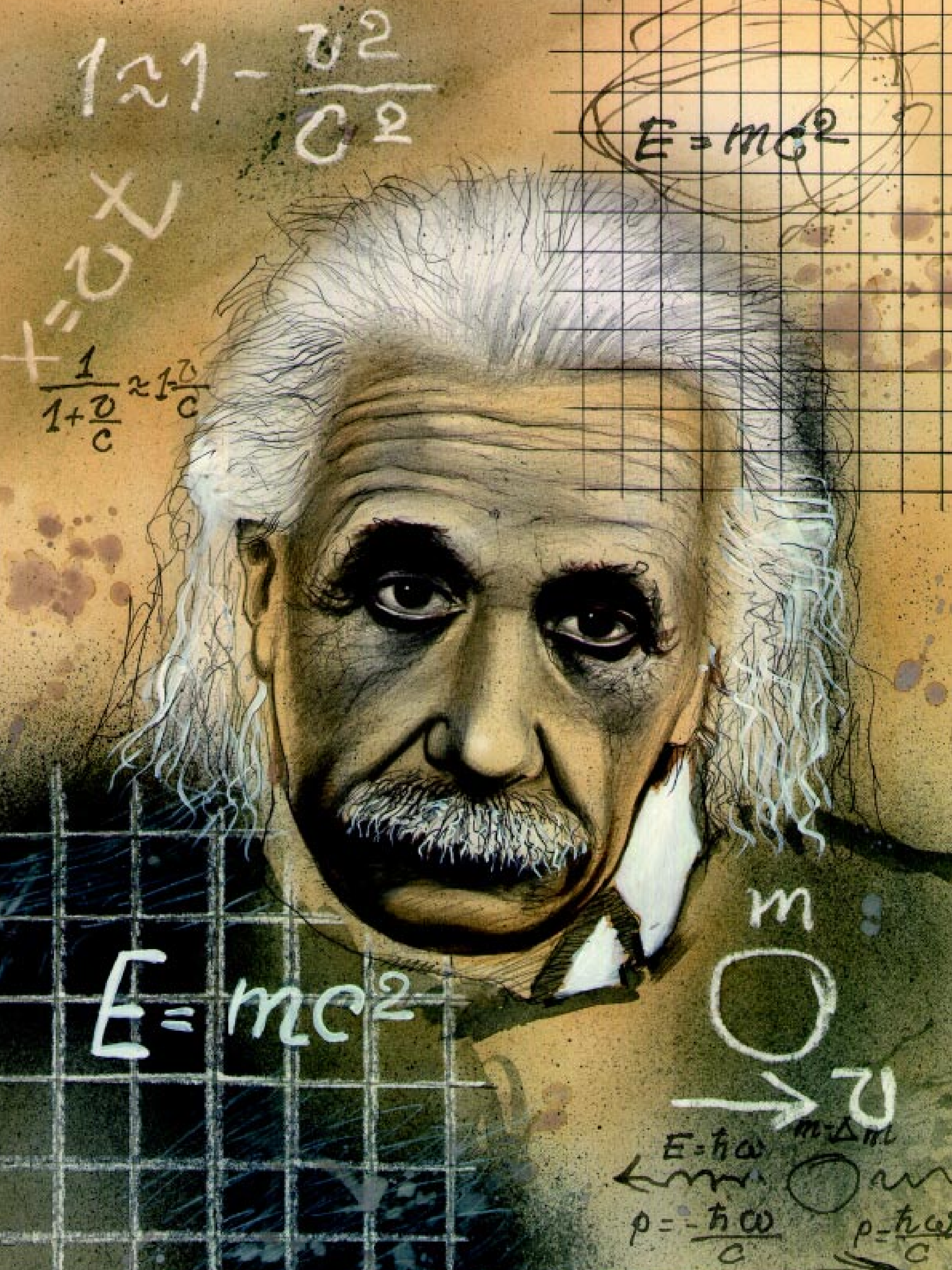
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум



$1 \approx 1 - \frac{v^2}{c^2}$
$\frac{1}{1+\frac{v}{c}} \approx 1-\frac{v}{c}$
$E=mc^2$
$E=mc^2$
m
v
$m-\Delta m$
$E=\hbar\omega$
$p=-\frac{\hbar\omega}{c}$
$p=\frac{\hbar\omega}{c}$

В 2005 году исполняется 100 лет с того дня, как была создана специальная теория относительности. За прошедшие годы следствия этой теории нашли подтверждение во многих опытах, и сегодня она является основой для понимания широчайшего круга явлений. Речь идет не только о качественном понимании, так сказать, о понимании без формул, хотя само по себе и такое понимание физических явлений очень важно. Теория относительности дает и точное количественное описание физических явлений, служит основой для расчета различных физических приборов и установок.

Предлагаем вниманию читателей две статьи, посвященные специальной теории относительности. Первая статья была опубликована в «Кванте» в 1995 году. Вторая статья перепечатывается из «Собрания научных трудов» Альберта Эйнштейна (М.: Наука, 1965).

Простой вывод формулы $E = mc^2$

Б.БОЛОТОВСКИЙ

Введение

Полная и окончательная формулировка современной теории относительности содержится в большой статье Альберта Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», опубликованной в 1905 году. Если говорить об истории создания теории относительности, то у Эйнштейна были предшественники. Отдельные важные вопросы теории исследовались в работах Х.Лоренца, Дж.Лармора, А.Пуанкаре, а также некоторых других физиков. Однако теория относительности как физическая теория до появления работы Эйнштейна не существовала. Работа Эйнштейна отличается от предшествующих работ совершенно новым пониманием как отдельных сторон теории, так и всей теории как целого, таким пониманием, которого не было в работах его предшественников.

Теория относительности заставила пересмотреть многие основные представления физики. Относительность одновременности событий, различия в ходе движущихся и покоящихся часов, отличия в длине движущейся и покоящейся линеек – эти и многие другие следствия теории относительности неразрывно связаны с новыми по сравнению с ньютоновской механикой представлениями о пространстве и времени, а также о взаимной связи пространства и времени.

Одно из важнейших следствий теории относительности – знаменитое соотношение Эйнштейна между массой m покоящегося тела и запасом энергии E в этом теле:

$$E = mc^2, \qquad (1)$$

где c – скорость света.

(Это соотношение называют по-разному. На Западе для него принято название «соотношение эквивалентности между массой и энергией». У нас долгое время было принято более осторожное название «соотношение взаимосвязи между массой и энергией». Сторонники этого более осторожного названия избегают слова «эквивалентность», тождественность, потому что, говорят они, масса и энергия – это разные качества вещества, они могут быть связаны между собой, но не тождественны, не эквивалентны. Мне кажется, что эта осторожность является излишней. Равенство $E = mc^2$ говорит само за себя. Из него следует, что массу можно измерять в единицах энергии, а энергию – в единицах массы. Кстати, так физики и поступают. А утверждение, что масса и энергия – это разные характеристики вещества, было справедливо в механике Ньютона, а в механике Эйнштейна само соотношение $E = mc^2$ говорит о тождественности этих двух величин – массы и энергии. Можно, конечно, сказать, что соотношение между массой и энергией не означает их тождественности. Но это все равно, что сказать, глядя на равенство 2 = 2: это не тождество, а соотношение между разными двойками, потому что справа стоит правая двойка, а слева – левая.)

Соотношение (1) обычно выводится из уравнения движения тела в эйнштейновской механике, но этот вывод достаточно труден для ученика средней школы. Поэтому имеет смысл попытаться найти простой вывод этой формулы.

Сам Эйнштейн, сформулировав в 1905 году основы теории относительности в статье «К электродинамике движущихся тел», затем вернулся к вопросу о соотношении между массой и энергией. В том же 1905 году он опубликовал короткую заметку «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?». В этой статье он дал вывод соотношения $E = mc^2$, который опирает-

Иллюстрация В.Власова

ся не на уравнение движения, а, как и приведенный ниже вывод, на эффект Доплера. Но этот вывод тоже довольно сложный.

Вывод формулы $E = mc^2$, который мы хотим вам предложить, не основан на уравнении движения и, кроме того, является достаточно простым, так что школьники старших классов могут его одолеть – для этого почти не потребуется знаний, выходящих за пределы школьной программы. На всякий случай мы приведем все сведения, которые нам понадобятся. Это сведения об эффекте Доплера и о фотоне – частице электромагнитного поля. Но предварительно оговорим одно условие, которое будем считать выполненным и на которое будем опираться при выводе.

Условие малости скоростей

Мы будем предполагать, что тело массой m, с которым мы будем иметь дело, либо покоится (и тогда, очевидно, скорость его равна нулю), либо, если оно движется, то со скоростью v, малой по сравнению со скоростью света c. Иными словами, мы будем предполагать, что отношение v/c скорости тела к скорости света есть величина малая по сравнению с единицей. Однако мы будем считать отношение v/c хотя и малой, но не пренебрежимо малой величиной – будем учитывать величины, пропорциональные первой степени отношения v/c, но будем пренебрегать вторыми и более высокими степенями этого отношения. Например, если при выводе нам придется иметь дело с выражением $1 - v^2/c^2$, мы будем пренебрегать величиной v^2/c^2 по сравнению с единицей:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 1, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll \frac{v}{c} \ll 1. \qquad (2)$$

В этом приближении получаются соотношения, которые на первый взгляд могут показаться странными, хотя ничего странного в них нет, надо только помнить, что соотношения эти не являются точными равенствами, а справедливы с точностью до величины v/c включительно, величинами же порядка v^2/c^2 мы пренебрегаем. В таком предположении справедливо, например, следующее приближенное равенство:

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \approx 1 + \frac{v}{c}, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \qquad (3)$$

Действительно, умножим обе части этого приближенного равенства на $1 - v/c$. Мы получим

$$1 \approx 1 - \frac{v^2}{c^2},$$

т.е. приближенное равенство (2). Поскольку мы считаем, что величина v^2/c^2 пренебрежимо мала в сравнении с единицей, мы видим, что в приближении $v^2/c^2 \ll 1$ равенство (3) справедливо.

Аналогично, нетрудно доказать в том же приближении равенство

$$\frac{1}{1 + \frac{v}{c}} \approx 1 - \frac{v}{c}. \qquad (4)$$

Чем меньше величина v/c, тем точнее эти приближенные равенства.

Мы не случайно будем использовать приближение малых скоростей. Нередко приходится слышать и читать, что теория относительности должна применяться в случае больших скоростей, когда отношение скорости тела к скорости света имеет порядок единицы, при малых же скоростях применима механика Ньютона. На самом деле теория относительности не сводится к механике Ньютона даже в случае сколь угодно малых скоростей. Мы это увидим, доказав соотношение $E = mc^2$ для покоящегося или очень медленно движущегося тела. Механика Ньютона такого соотношения дать не может.

Оговорив малость скоростей по сравнению со скоростью света, перейдем к изложению некоторых сведений, которые понадобятся нам при выводе формулы $E = mc^2$.

Эффект Доплера

Мы начнем с явления, которое называется по имени австрийского физика Кристиана Доплера, открывшего это явление в середине позапрошлого века.

Рассмотрим источник света, причем будем считать, что источник движется вдоль оси x со скоростью v. Предположим для простоты, что в момент времени $t = 0$ источник проходит через начало координат, т.е. через точку $x = 0$. Тогда положение источника в любой момент времени t определяется формулой

$$x = vt.$$

Предположим, что далеко впереди излучающего тела на оси x помещен наблюдатель, который следит за движением тела. Ясно, что при таком расположении тело приближается к наблюдателю. Допустим, что наблюдатель взглянул на тело в момент времени t. В этот момент до наблюдателя доходит световой сигнал, излученный телом в более ранний момент времени t'. Очевидно, момент излучения должен предшествовать моменту приема, т.е. должно быть $t' < t$.

Определим связь между t' и t. В момент излучения t' тело находится в точке $x' = vt'$, а наблюдатель пусть находится в точке $x = L$. Тогда расстояние от точки излучения до точки приема равно $L - vt'$, а время, за которое свет пройдет такое расстояние, равно $(L - vt')/c$. Зная это, мы легко можем записать уравнение, связывающее t' и t:

$$t = t' + \frac{L - vt'}{c}.$$

Отсюда

$$t' = \frac{t - L/c}{1 - v/c}. \qquad (5)$$

Таким образом, наблюдатель, глядя на движущееся тело в момент времени t, видит это тело там, где оно находилось в более ранний момент времени t', причем связь между t и t' определяется формулой (5).

Предположим теперь, что яркость источника периодически меняется по закону косинуса. Обозначим яркость буквой I. Очевидно, I есть функция времени, и мы можем, учитывая это обстоятельство, записать

$$I(t) = I_0 + I_1 \cos\omega t \quad (I_0 > I_1 > 0),$$

где I_0 и I_1 – некоторые постоянные, не зависящие от времени. Неравенство в скобках необходимо потому, что яркость не может быть отрицательной величиной. Но для нас в данном случае это обстоятельство не имеет никакого значения, поскольку в дальнейшем нас будет интересовать только переменная составляющая – второе слагаемое в формуле для $I(t)$.

Пусть наблюдатель смотрит на тело в момент времени t. Как уже было сказано, он видит тело в состоянии, соответствующем более раннему моменту времени t'. Переменная часть яркости в момент t' пропорциональна $\cos\omega t'$. С учетом соотношения (5) получаем

$$\cos\omega t' = \cos\omega\frac{t - L/c}{1 - v/c} = \cos\left(\frac{\omega t}{1 - v/c} - \omega\frac{L}{c}\frac{1}{1 - v/c}\right).$$

Коэффициент при t под знаком косинуса дает частоту изменения яркости, как ее видит наблюдатель. Обозначим эту частоту через ω', тогда

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - v/c}. \qquad (6)$$

Если источник покоится ($v = 0$), то $\omega' = \omega$, т.е. наблюдатель воспринимает ту же самую частоту, что излучается источником. Если же источник движется к наблюдателю (в этом случае наблюдатель принимает излучение, направленное вперед по движению источника), то принимаемая частота ω' отличается от излучаемой частоты ω, причем принимаемая частота больше излучаемой.

Случай, когда источник движется от наблюдателя, можно получить, изменив знак перед v в соотношении (6). Видно, что тогда принимаемая частота оказывается меньше излучаемой.

Можно сказать, что вперед излучаются большие частоты, а назад – малые (если источник удаляется от наблюдателя, то наблюдатель, очевидно, принимает излучение, испущенное назад).

В несовпадении частоты колебаний источника и частоты, принимаемой наблюдателем, и состоит эффект Доплера. Если наблюдатель находится в системе координат, в которой источник покоится, то излучаемая и принимаемая частоты совпадают. Если же наблюдатель находится в системе координат, в которой источник движется со скоростью v, то связь излучаемой и принимаемой частот определяется формулой (6). При этом мы предполагаем, что наблюдатель всегда покоится.

Как видно, связь между излучаемой и принимаемой частотами определяется скоростью v относительного движения источника и наблюдателя. В этом смысле безразлично, кто движется – источник приближается к наблюдателю или наблюдатель к источнику. Но нам в дальнейшем удобнее будет считать, что наблюдатель покоится.

Строго говоря, в разных системах координат время течет по-разному. Изменение хода времени также сказывается на величине наблюдаемой частоты. Если, например, частота колебаний маятника в системе координат, где он покоится, равна ω, то в системе координат, где он движется со скоростью v, частота равна $\omega\sqrt{1 - v^2/c^2}$. К такому результату приводит теория относительности. Но поскольку мы с самого начала условились пренебрегать величиной v^2/c^2 по сравнению с единицей, то изменение хода времени для нашего случая (движение с малой скоростью) пренебрежимо мало.

Таким образом, наблюдение за движущимся телом имеет свои особенности. Наблюдатель видит тело не там, где оно находится (пока сигнал идет к наблюдателю, тело успевает переместиться), и принимает сигнал, частота которого ω' отличается от излучаемой частоты ω.

Выпишем теперь окончательные формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем. Если движущийся источник излучает вперед по направлению движения, то частота ω', принятая наблюдателем, связана с частотой источника ω соотношением

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - v/c} = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad \frac{v}{c} \ll 1. \qquad (7)$$

Для излучения назад имеем

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + v/c} = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad \frac{v}{c} \ll 1. \qquad (8)$$

Энергия и импульс фотона

Современное представление о частице электромагнитного поля – фотоне, как и формула $E = mc^2$, которую мы собираемся доказать, принадлежит Эйнштейну и было высказано им в том же 1905 году, в котором он доказал эквивалентность массы и энергии. Согласно Эйнштейну, электромагнитные и, в частности, световые волны состоят из отдельных частиц – фотонов. Если рассматривается свет некоторой определенной частоты ω, то каждый фотон имеет энергию E, пропорциональную этой частоте:

$$E = \hbar\omega.$$

Коэффициент пропорциональности $\hbar$ называется постоянной Планка. По порядку величины постоянная Планка равна 10^{-34}, размерность ее Дж·с. Мы здесь не выписываем точного значения постоянной Планка, оно нам не понадобится.

Иногда вместо слова «фотон» говорят «квант электромагнитного поля».

Фотон имеет не только энергию, но и импульс, равный

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{E}{c}.$$

Этих сведений нам будет достаточно для дальнейшего.

Вывод формулы $E = mc^2$

Рассмотрим покоящееся тело массой m. Предположим, что это тело одновременно излучает два фотона в прямо противоположных направлениях. Оба фотона имеют одинаковые частоты ω и, значит, одинаковые энергии $E = \hbar\omega$, а также равные по величине и противоположные по направлению импульсы. В результате излучения тело теряет энергию

$$\Delta E = 2\hbar\omega . \qquad (9)$$

Потеря импульса равна нулю, и, следовательно, тело после излучения двух квантов остается в покое.

Этот мысленный опыт представлен на рисунке 1. Тело изображено кружком, а фотоны – волнистыми линиями. Один из фотонов излучается в положительном направлении оси x, другой – в отрицательном. Около волнистых линий приведены значения энергии и импульса соответствующих фотонов. Видно, что сумма излученных импульсов равна нулю.

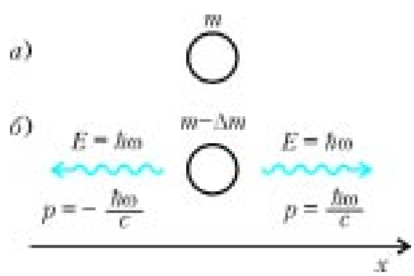


Рис.1. Картина двух фотонов в системе отсчета, в которой излучающее тело покоится: а) тело до излучения; б) после излучения

Рассмотрим теперь ту же картину с точки зрения наблюдателя, который движется по оси x влево (т.е. в отрицательном направлении оси x) с малой скоростью v. Такой наблюдатель увидит уже не покоящееся тело, а тело, движущееся с малой скоростью вправо. Величина этой скорости равна v, а направлена скорость в положительном направлении оси x. Тогда частота, излучаемая вправо, будет определяться формулой (7) для случая излучения вперед:

$$\omega' = \omega\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Мы частоту фотона, излучаемого движущимся телом вперед по направлению движения, обозначили через ω', чтобы не спутать эту частоту с частотой ω излучаемого фотона в той системе координат, где тело покоится. Соответственно, частота фотона, излучаемого движущимся телом влево, определяется формулой (8) для случая излучения назад:

$$\omega'' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Чтобы не перепутать излучение вперед и излучение назад, мы будем величины, относящиеся к излучению назад, обозначать двумя штрихами.

Поскольку, из-за эффекта Доплера, частоты излучения вперед и назад различны, энергия и импульс у излученных квантов также будут различаться. Квант, излученный вперед, будет иметь энергию

$$E' = \hbar\omega' = \hbar\omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

и импульс

$$p' = \frac{\hbar\omega'}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Квант, излученный назад, будет иметь энергию

$$E'' = \hbar\omega'' = \hbar\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

и импульс

$$p'' = \frac{\hbar\omega''}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

При этом импульсы квантов направлены в противоположные стороны.

Картина процесса излучения, каким его видит движущийся наблюдатель, изображена на рисунке 2.

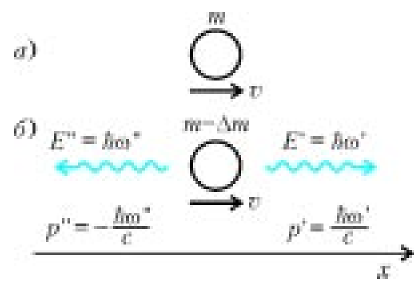


Рис.2. Картина двух фотонов в системе отсчета, где скорость излучающего тела равна v: а) тело до излучения; б) после излучения

Важно здесь подчеркнуть, что на рисунках 1 и 2 изображен один и тот же процесс, но с точки зрения разных наблюдателей. Первый рисунок относится к случаю, когда наблюдатель покоится относительно излучающего тела, а второй – когда наблюдатель движется.

Подсчитаем баланс энергии и импульса для второго случая. Потеря энергии в системе координат, где излучатель имеет скорость v, равна

$$\Delta E' = E' + E'' = \hbar\omega\left(1 + \frac{v}{c}\right) + \hbar\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 2\hbar\omega = \Delta E ,$$

т.е. она такая же, как и в системе, где излучатель покоится (см. формулу (9)). Но потеря импульса в системе, где излучатель движется, не равна нулю, в отличие от системы покоя:

$$\Delta p' = p' - p'' = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right) - \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{2\hbar\omega}{c}\frac{v}{c} = \frac{\Delta E}{c^2}v . \qquad (10)$$

Движущийся излучатель теряет импульс $\Delta E v / c^2$ и, следовательно, должен, казалось бы, тормозиться, уменьшать свою скорость. Но в системе покоя излучение симметрично, излучатель не меняет скорости. Значит, скорость излучателя не может измениться и в той системе, где он движется. А если скорость тела не меняется, то как оно может потерять импульс?

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, как записывается импульс тела массой m:

$$p = mv$$

– импульс равен произведению массы тела на его скорость. Если скорость тела не меняется , то его импульс может измениться только за счет изменения массы:

$$\Delta p = \Delta m v .$$

Здесь Δp – изменение импульса тела при неизменной скорости, Δm – изменение его массы.

Это выражение для потери импульса надо приравнять к выражению (10), которое связывает потерю импульса с потерей энергии. Мы получим формулу

$$\frac{\Delta E}{c^2} v = \Delta m v ,$$

или

$$\Delta E = \Delta m c^2 ,$$

которая означает, что изменение энергии тела влечет за собой пропорциональное изменение его массы. Отсюда легко получить соотношение между полной массой тела и полным запасом энергии:

$$E = mc^2 .$$

Открытие этой формулы явилось огромным шагом вперед в понимании природных явлений. Само по себе осознание эквивалентности массы и энергии есть великое достижение. Но полученная формула, помимо того, имеет широчайшее поле применения. Распад и слияние атомных ядер, рождение и распад частиц, превращения элементарных частиц одна в другую и множество других явлений требуют для своего объяснения учета формулы связи между массой и энергией.

В заключение – два домашних задания для любителей теории относительности.

1. Прочитайте статью А.Эйнштейна «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?» (см. с. 7).

2. Попробуйте самостоятельно вывести соотношение $\Delta m = \Delta E / c^2$ для случая системы отсчета, скорость которой v может быть не малой по сравнению со скоростью света c. *Указание*. Используйте точную формулу для импульса частицы:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и точную формулу для эффекта Доплера:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} ,$$

которая получается, если учесть различие в ходе времени в покоящейся и движущейся системах отсчета.

Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?

А.ЭЙНШТЕЙН

РЕЗУЛЬТАТЫ ... ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИВОДЯТ НАС к очень интересному следствию, вывод которого будет дан в этой статье.

В ... исследовании я исходил, кроме уравнений Максвелла – Герца для пустоты и формулы Максвелла для электромагнитной энергии пространства, еще из следующего принципа.

Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из двух координатных систем, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга, отнесены эти изменения состояния (принцип относительности). Исходя из этого, я, в частности, пришел к следующему результату ...

Пусть система плоских волн света, отнесенная к координатной системе (x, y, z), обладает энергией l и пусть направление луча (нормаль к фронту волны) образует угол φ с осью x системы. Если ввести новую координатную систему (ξ, η, ζ), движущуюся равномерно и прямолинейно относительно системы (x, y, z), и если начало координат первой системы движется со скоростью v вдоль оси x, то упомянутая энергия света, измеренная в системе (ξ, η, ζ), будет

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos\varphi}{\sqrt{1 - (v/V)^2}} ,$$

где V – скорость света. В дальнейшем мы воспользуемся этим результатом.

Пусть в системе (x, y, z) находится покоящееся тело, энергия которого, отнесенная к системе (x, y, z), равна

E_0. Энергия же этого тела, отнесенная к системе (ξ, η, ζ), движущейся, как выше, со скоростью v, пусть равна H_0.

Пусть это тело посылает в направлении, составляющем угол φ с осью x, плоскую световую волну с энергией $L/2$ (измеренной относительно системы (x, y, z)) и одновременно посылает такое же количество света в противоположном направлении. При этом тело остается в покое относительно системы (x, y, z). Для этого процесса должен выполняться закон сохранения энергии и притом (согласно принципу относительности) по отношению к обеим координатным системам. Если мы обозначим через E_1 энергию тела после излучения света при измерении ее относительно системы (x, y, z) и, соответственно, через H_1 энергию относительно системы (ξ, η, ζ), то, пользуясь полученным выше соотношением, находим

$$E_0 = E_1 + \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right),$$

$$H_0 = H_1 + \left(\frac{L}{2}\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(v/V)^2}} + \frac{L}{2}\frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-(v/V)^2}}\right) =$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1-(v/V)^2}}.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1\right).$$

В этом соотношении обе разности вида $H - E$ имеют простой физический смысл. Величины H и E представляют собой значения энергии одного и того же тела, отнесенные к двум координатным системам, движущимся относительно друг друга, причем тело покоится в одной из систем (в системе (x, y, z)). Таким образом, ясно, что разность $H - E$ может отличаться от кинетической энергии K тела, взятой относительно другой системы (системы (ξ, η, ζ)), только на некоторую аддитивную постоянную C, которая зависит от выбора произвольных аддитивных постоянных в выражениях для энергий H и E. Следовательно, мы можем положить

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

так как постоянная C при испускании света не изменяется.

Таким образом, получаем

$$K_0 - K_1 = L\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/V)^2}} - 1\right).$$

Кинетическая энергия тела относительно системы (ξ, η, ζ) уменьшается при испускании света на величину, не зависящую от природы тела. Кроме того, разность $K_0 - K_1$ зависит от скорости точно так же, как кинетическая энергия электрона ...

Пренебрегая величинами четвертого и более высоких порядков, можно получить

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2}\,\frac{v^2}{2}.$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что если тело отдает энергию L в виде излучения, то его масса уменьшается на L/V^2. При этом, очевидно, несущественно, что энергия, взятая у тела, прямо переходит в лучистую энергию излучения, так что мы приходим к более общему выводу.

Масса тела есть мера содержащейся в нем энергии; если энергия изменяется на величину L, то масса меняется, соответственно, на величину $L/(9 \cdot 10^{20})$, причем здесь энергия измеряется в эргах, а масса – в граммах.

Не исключена возможность того, что теорию удастся проверить для веществ, энергия которых меняется в большей степени (например, для солей радия).

Если теория соответствует фактам, то излучение переносит инерцию между излучающими и поглощающими телами.

Поступила 27 сентября 1905 г.

Числа Пизо

А.ЕГОРОВ

Продолжим изучение чисел Пизо. Мы доказали, что целые алгебраические числа второй и третьей степеней, обладающие свойством Пизо, являются числами Пизо. Аналогичное утверждение, естественно, справедливо и для произвольных степеней. Доказательством этого мы сейчас и займемся.

Окончание. Начало см. в «Кванте» №5.

Иррациональности степени $r > 3$

Итак, пусть $\alpha > 1$ – целое алгебраическое число степени $r > 3$ и $p(x) = x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_r$ – минимальный многочлен числа α. Предположим, что $\left\{\left\{\alpha^n\right\}\right\} \to 0$. Оказывается, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении перечисленных выше условий* α *– число Пизо.*

Иллюстрация В.Иванюка

Доказательство. Мы должны доказать, что все числа $\alpha_2,\ldots,\alpha_r$, сопряженные с α, по модулю меньше 1.

Вспомним, что если $A_n=\left(\alpha^n\right)$, то, начиная с некоторого номера N, т.е. при $n\ge N$, целые положительные числа A_n образуют линейную рекурренту:

$$A_{n+r}+a_1A_{n+r-1}+\ldots+a_rA_n=0\,.$$

Это, в свою очередь, означает, что

$$A_n=c_1\alpha_1^n+\ldots+c_r\alpha_r^n\,,$$

где $\alpha=\alpha_1$, $n\ge N$, а $c_1,c_2,\ldots,c_r$ – некоторые (вообще говоря, комплексные) числа.

Докажем, что, как и в случае квадратичных и кубических иррациональностей, числа $c_1,c_2,\ldots,c_r$ – не нули.

Предположим, например, что $c_1,\ldots,c_k$ – не нули, а $c_{k+1}=\ldots=c_r=0$. Тогда при $n\ge N$

$$\begin{cases}A_n=c_1\alpha_1^n+\ldots+c_k\alpha_k^n,\\ \ldots\\ A_{n+k}=c_1\alpha_1^{n+k}+\ldots+c_k\alpha_k^{n+k}.\end{cases}$$

Рассмотрим многочлен

$$q(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)=x^k+q_1x^{k-1}+\ldots+q_k\,.$$

Числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ – корни многочлена $q(x)$. Умножим первое из уравнений системы на q_k, второе – на q_{k-1}, … …, предпоследнее – на q_1 и сложим все уравнения. Получим равенство

$$A_{n+k}+q_1A_{n+k-1}+\ldots+q_kA_n=$$
$$=c_1\alpha_1^nq(\alpha_1)+c_2\alpha_2^nq(\alpha_2)+\ldots+c_k\alpha_k^nq(\alpha_k)\,.$$

Но $q(\alpha_1)=q(\alpha_2)=\ldots=q(\alpha_k)=0$, так что

$$A_{n+k}+q_1A_{n+k-1}+\ldots+q_kA_n=0\,.$$

Следовательно, *целые* числа A_n образуют линейную рекурренту порядка $k<r$.

Докажем, что все коэффициенты $q_1,\ldots,q_k$ – рациональные числа. Ранее мы уже доказали аналогичное утверждение для случая $r=3$. Будем действовать сходным образом.

Рассмотрим систему из k уравнений относительно $q_1,\ldots,q_k$:

$$\begin{cases}A_{n+k}+q_1A_{n+k-1}+\ldots+q_kA_n=0,\\ A_{n+k+1}+q_1A_{n+k}+\ldots+q_kA_{n+1}=0,\\ \ldots\\ A_{n+2k-1}+q_1A_{n+2k-2}+\ldots+q_kA_{n+k-1}=0.\end{cases}$$

Пользуясь теорией определителей (это единственное место, где мы вынуждены воспользоваться ссылкой на сравнительно неэлементарные понятия), можно доказать, что определитель системы не равен нулю (это следует из того, что числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ попарно различны и не равны нулю). Отсюда и из известного правила Крамера решения линейных систем следует, что числа $q_1,\ldots,q_k$ – рациональны. Впрочем, если представить себе процедуру решения системы методом исключения неизвестных, нетрудно понять, что при условии существования и единственности решения числа $q_1,\ldots,q_k$ будут рациональны.

Таким образом, числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ – корни многочлена $q(x)$ с рациональными коэффициентами. Пусть M – общий наименьший знаменатель дробей $q_1=\dfrac{m_1}{n_1}$, $q_2=\dfrac{m_2}{n_2}$, …, $q_k=\dfrac{m_k}{n_k}$. Числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ являются корнями многочлена $Q(x)=Mq(x)$ с целыми коэффициентами. Но степень многочлена $Q(x)$ меньше степени многочлена $p(x)$, что противоречит минимальности многочлена $p(x)$. Вот где работает неприводимость минимального многочлена!

Итак, ни одно из чисел $c_1,\ldots,c_r$ не равно нулю. Теперь легко завершить доказательство теоремы. Рассмотрим разность

$$\delta_n=A_n-\alpha^n=(c_1-1)\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n+\ldots+c_r\alpha_r^n\,.$$

Поскольку δ_n стремится к нулю, $\alpha=\alpha_1>1$, а числа $c_2,\ldots,c_r$ – не нули, то по лемме (см. «Квант» №5, с.13)

$$c_1=1\,,\ |\alpha_2|<1,\ldots,|\alpha_r|<1\,.$$

Следовательно, α – число Пизо, и теорема 2 доказана.

Теперь, мы полностью разобрались с целыми алгебраическими числами. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2′. *Целое действительное алгебраическое число $\alpha>1$ обладает свойством Пизо тогда и только тогда, когда оно является числом Пизо, т.е. когда все числа, сопряженные с α, по модулю меньше 1.*

Мы уже видели, что не целые рациональные числа (т.е. алгебраические числа первого порядка) свойством Пизо обладать не могут. А как обстоят дела с не целыми алгебраическими иррациональностями? Например, как ведут себя степени α^n, где $\alpha=\dfrac{1+\sqrt2}{2}$ – корень уравнения $4x^2-4x-1=0$? Сопряженное с α число $\beta=\dfrac{1-\sqrt2}{2}$ по модулю меньше 1, так что α очень похоже на число Пизо. Однако, как мы увидим дальше, такие числа свойством Пизо не обладают.

Произвольные алгебраические числа

Пусть α – не целое алгебраическое число степени r, т.е. корень неприводимого многочлена

$$p(x)=a_0x^r+a_1x^{r-1}+\ldots+a_r\,,$$

где $a_0>1$, $a_1,\ldots,a_r$ – целые числа. Далее мы будем считать, что многочлен $p(x)$ примитивен, т.е. что его коэффициенты в совокупности взаимно просты.

Предположим, что α обладает свойством Пизо, т.е. $\alpha^n=A_n+\delta_n$, где A_n – натуральное, а $\delta_n\to0$ при $n\to\infty$. Поскольку α – корень многочлена $p(x)$, так же, как и раньше, получим, что

$$a_0A_{n+r}+a_1A_{n+r-1}+\ldots+a_rA_n=0$$

при всех достаточно больших n. Таким образом, целые числа A_n образуют ЛР с целыми коэффициентами, причем «старший коэффициент» a_0 отличен от 1.

Нашей целью станет изучение таких линейных рекуррент, соответствующих *неприводимым* многочленам $p(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_r$.

Сначала мы докажем, что существуют целые числа $p_1, p_2, \ldots, p_m$, где $m > r$, для которых при всех достаточно больших n выполняются равенства

$$A_{n+m} + p_1A_{n+m-1} + \ldots + p_mA_n = 0,$$

т.е. что *целочисленная* ЛР со старшим коэффициентом $a_0 > 1$ является ЛР большего порядка со старшим коэффициентом 1. А уже отсюда и из неприводимости многочлена $p(x)$ будет следовать, что характеристический многочлен

$$P(x) = x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_m$$

делится на многочлен $p(x)$. Но многочлен $p(x)$ неприводим и примитивен, и поэтому, в силу утверждения 2, $P(x) = h(x)p(x)$, где $h(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а это возможно лишь при $a_0 = 1$. Таков наш план. К его осуществлению мы и приступаем.

Ограничимся случаем иррациональностей второй степени. Для более высоких степеней рассуждения отличаются лишь большей громоздкостью.

Итак, пусть $\alpha > 1$ – иррациональный корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a > 1$, целые числа a, b, c взаимно просты, а β – сопряженное с α число.

Предположим, что $\alpha^n = A_n + \delta_n$, где $\delta_n \to 0$. Тогда

$$aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n + a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n =$$
$$= aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n + \gamma_n = 0.$$

Так как $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то при достаточно больших $n \geq N_0$ числа A_n образуют линейную рекурренту:

$$aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n = 0.$$

При этом

$$A_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n,$$

где c_1 и c_2 – *отличные от нуля числа* (убедитесь в этом).

Теперь на время прервемся, чтобы сформулировать и доказать одно чисто алгебраическое утверждение.

Алгебраическая лемма

Назовем n-мерным целочисленным вектором произвольный упорядоченный набор $\bar{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ целых чисел.

Определение 9. *Пусть A – некоторое множество целочисленных n-мерных векторов. Набор векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r$ из A называется базисным, если любой вектор $\bar{x} \in A$ можно представить в виде $\bar{x} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_r\bar{a}_r$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ – некоторые целые числа.*

Алгебраическая лемма. *Во всяком множестве A целочисленных векторов имеется конечный базисный набор.*

Доказательство. Рассмотрим сначала некоторое множество A одномерных векторов, т.е. целых чисел. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – эти числа. Будем (для определенности) считать, что $x_1 > 0$. Рассмотрим остатки от деления чисел $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ на x_1. (Если все числа делятся на x_1, то уже x_1 и есть базисный набор.) Поделим x_i на x_1 с остатком:

$$x_i = q_ix_1 + r_i, \text{ где } 0 \leq r_i < x_1.$$

Заметим, что если x_j и x_i дают одинаковые остатки, то

$$x_j - x_i = (q_j - q_i)x_1,$$

и

$$x_j = (q_j - q_i)x_1 + x_i,$$

т.е. x_j – линейная комбинация чисел x_1 и x_i.

Разобьем все множество A на классы чисел, дающих одинаковые остатки при делении на x_1. Пусть этих классов имеется r штук ($r \leq x_1$). В каждом классе выберем какое-нибудь число. Множество выбранных чисел и даст нам, очевидно, требуемый базисный набор. Изменив, если надо, нумерацию чисел, можем считать, что это числа $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

В самом деле, для любого числа x_m среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_r$ есть число x_k, сравнимое с ним по модулю x_1, и тогда

$$x_m - x_k = q_mx_1,$$

т.е.

$$x_m = x_k + q_mx_1.$$

Далее применим индукцию по n. Предположим, что утверждение уже доказано для n-мерных векторов и A – некоторое множество целочисленных $(n+1)$-мерных векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Рассмотрим множество B n-мерных векторов, получаемых из векторов множества A отбрасыванием последней координаты x_{n+1}. По предположению индукции, во множестве B имеется базисный набор векторов $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k$. Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ – соответствующие им векторы из множества A (набор $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ восстанавливается неоднозначно, но это нас не должно беспокоить). Если $\bar{a} \in A$ – произвольный вектор: $\bar{a} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, то для некоторых целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ будет

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\bar{b}_i,$$

но тогда первые n координат вектора

$$\bar{a}' = \bar{a} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\bar{a}_i$$

равны нулю, т.е.

$$\bar{a}' = (0, 0, \ldots, 0, \tilde{x}_{n+1}).$$

Рассмотрим множество A' всех векторов вида $\bar{a}'$. Во множестве A', как было доказано раньше, имеется базисный набор векторов. Пусть это будут векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_l$. Вспомним, что при любом $1 \leq j \leq l$

$$\bar{e}'_j = \bar{e}_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij}\bar{a}_i,$$

где $\bar{e}_j$ – некоторый вектор из A, а $\lambda_{ij} \in \mathbf{Z}$, $1 \leq i \leq k$. Добавим теперь к векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_l$. Это и будет требуемый базисный набор в A.

Действительно, пусть $\overline{a} \in A$ – произвольный вектор. Тогда

$$\overline{a}' = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \overline{e}'_j, \quad \text{где } \mu_j \in \mathbf{Z},$$

т.е.

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \overline{e}'_j .$$

Выражая $\overline{e}'_j$ через $\overline{e}_j$ и $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$, получим (после сокращений) представление $\overline{a}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_l$. Лемма доказана.

Завершающий этап

Рассмотрим последовательность A двумерных векторов $\overline{a}_n = (A_n, A_{n+1})$. По доказанному, в этой последовательности есть базисный набор. Пусть это векторы $\overline{a}_{n_1}, \overline{a}_{n_2}, \ldots, \overline{a}_{n_k}$. Но тогда существуют целые числа $p_1, \ldots, p_k$ такие, что

$$\overline{a}_{n_k+1} = \sum_{i=1}^{k} p_i \overline{a}_{n_i} .$$

Обозначив $n_k + 1$ через r, получаем равенство

$$(A_r, A_{r+1}) = \sum_{i=1}^{k} p_i (A_{n_i}, A_{n_i+1}) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i A_{n_i}, \sum_{i=1}^{k} p_i A_{n_i+1} \right).$$

Приравнивая координаты левой и правой частей, имеем

$$A_r = \sum_{i=1}^{k} p_i A_{n_i}, A_{r+1} = \sum_{i=1}^{k} p_i A_{n_i+1} .$$

Заменив все числа A_n их выражениями через α и β:

$$A_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n ,$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 \left(\alpha^r - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \alpha^{n_i} \right) + c_2 \left(\beta^r - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \beta^{n_i} \right) = 0, \\ c_1 \left(\alpha^{r+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \alpha^{n_i+1} \right) + c_2 \left(\beta^{r+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \beta^{n_i+1} \right) = 0. \end{cases}$$

Пусть $P(x) = x^r - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i x^{n_i}$. Многочлен $P(x)$ имеет целые коэффициенты, а старший его коэффициент равен 1. Систему перепишем так:

$$\begin{cases} c_1 P(\alpha) + c_2 P(\beta) = 0, \\ c_1 \alpha P(\alpha) + c_2 \beta P(\beta) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} c_1 (\beta - \alpha) P(\alpha) = 0, \\ c_2 (\beta - \alpha) P(\beta) = 0. \end{cases}$$

Но c_1 и c_2 не равны нулю и $\beta \neq \alpha$, поэтому $P(\alpha) = 0$ и $P(\beta) = 0$, т.е. α и β – корни многочлена $P(x)$. А раз так, то

$$P(x) = Q(x)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

Из неприводимости и примитивности квадратного трехчлена следует, что $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами (см. утверждение 2). Но тогда, если q_0 – старший коэффициент многочлена $Q(x)$, то старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен $1 = a \cdot q_0$ Но это возможно лишь при $a = 1$ и $q_0 = 1$. А это мы и собирались доказать.

В общем случае все рассуждения аналогичны. Именно, рассматривая последовательность A целочисленных r-мерных векторов $\overline{a}_n = (A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+r-1})$, выбираем в A базисный набор. Исходя из базисного набора, строим многочлен $P(x)$. Доказываем, что все корни $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ являются корнями $P(x)$, т.е. $P(x)$ делится на неприводимый и примитивный многочлен $p(x)$ и частное является многочленом с целыми коэффициентами. Откуда и следует, что старший коэффициент a_0 многочлена $p(x)$ равен 1.

Тем самым доказана замечательная теорема.

Теорема 3. *Алгебраическое число α обладает свойством Пизо тогда и только тогда, когда α – число Пизо.*

Какие бывают числа Пизо

Определение 10. *Многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1, называется многочленом Пизо, если один из его корней $\alpha > 1$, а остальные корни не равны нулю и по модулю меньше единицы.*

Докажем, что всякий многочлен Пизо неприводим. Пусть $p(x) = p_1(x) p_2(x)$, где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами, и $\alpha > 1$ – корень многочлена $p(x)$. Тогда $p_1(\alpha) p_2(\alpha) = 0$. Пусть, для определенности, $p_1(\alpha) = 0$. Но свободный член многочлена $p_2(x)$, равный по теореме Виета произведению его корней, не равен нулю и по модулю меньше 1. Противоречие.

Докажем, что существуют числа Пизо любой наперед заданной степени r. Для этого достаточно построить многочлен Пизо степени r. Построение осуществим так.

Возьмем точки $x_1 = \frac{1}{r}$, $x_2 = \frac{2}{r}$, …, $x_{r-1} = \frac{r-1}{r}$, $x_r = 1$ и построим многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами степени $r - 1$ такой, что

$$f(1) = -2, f\left(\frac{r-1}{r}\right) = 2, \ldots, f(x_k) = (-1)^{k+1} \cdot 2, \ldots, f(x_1) = f\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^r \cdot 2 .$$

Вот один из способов такого построения (для знатоков – мы строим так называемый интерполяционный многочлен Лагранжа). Сначала строим многочлены $\varphi_i(x)$ такие, что $\varphi_i(x_i) = 1$, а $\varphi_i(x_k) = 0$ при $i \neq k$:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_r)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_r)},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_r)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_r)},$$

$$\ldots$$

$$\varphi_r(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{r-1})}{(x_r - x_1)\ldots(x_r - x_{r-1})}.$$

Все многочлены $\varphi_i(x)$ имеют рациональные коэффициенты и степень $r-1$.

Пусть

$$g(x) = -2\varphi_r(x) + 2\varphi_{r-1}(x) + \ldots + (-1)^r \cdot 2\varphi_1(x).$$

Коэффициенты многочлена $g(x)$ рациональны, а

$$g(x_i) = (-1)^{r-i+1} \cdot 2 \text{ при } i = 1, 2, \ldots, r.$$

Предположим, что M – наименьший общий знаменатель его коэффициентов. Многочлен $P(x) = Mg(x)$ имеет целые коэффициенты. При этом

$$P(x_i) = (-1)^{r-i+1} \cdot 2M.$$

Знаки чисел $P(x_i)$ чередуются, и каждое из этих чисел по модулю не меньше чем 2.

Пусть теперь

$$f(x) = x^r + P(x).$$

Степень многочлена $f(x)$ равна r, его коэффициенты – целые числа, старший коэффициент равен 1, а знаки чисел $f(x_i) = x_i^r + P(x_i)$ чередуются. Поэтому $f(x)$ имеет корень на каждом из промежутков $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3), \ldots, (x_{r-1}; x_r)$. А так как $f(x_r) = f(1) < 0$, то и на промежутке $(1; +\infty)$ тоже есть корень.

Таким образом, многочлен $f(x)$ степени r имеет в точности r действительных корней. Один из них больше 1, остальные положительны и меньше 1. По доказанному ранее, многочлен $f(x)$ неприводим и больший его корень – число Пизо.

Итак, чисел Пизо достаточно много. Однако при любом натуральном k в промежутке $(k; k+1)$ содержится лишь *конечное* количество чисел Пизо данной степени r. Это следует из того, что если $P(x) = x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_r$ – многочлен Пизо и $k < \alpha < k+1$ – его корень, то a_k – целое число, равное сумме произведений корней многочлена $p(x)$ по k, умноженной на $(-1)^k$. Всего таких произведений C_r^k, а каждое из них по модулю меньше чем $k+1$ (один корень – между k и $k+1$, а остальные – по модулю меньше 1), так что $|a_k| < (k+1)C_r^k$.

Но уже таких многочленов конечное число, так как все они имеют ограниченные в совокупности целые коэффициенты.

В то же время, в каждом промежутке $(k; k+1)$ есть числа Пизо любой наперед заданной степени.

Мы приведем без доказательства соответствующие многочлены Пизо.

Для *второй* степени – это многочлен

$$x^2 - kx - 1,$$

где k – натуральное число. Один из его корней $\alpha = \dfrac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$ лежит в интервале $(k; k+1)$, второй корень отрицателен и по модулю меньше 1.

Для *третьей* степени это многочлен

$$x^3 - x - 1,$$

имеющий корень в интервале $(1; 2)$, и многочлен

$$x^3 - (k+1)x^2 + 1$$

при натуральном $k \geq 2$ для промежутка $(k; k+1)$.

Наконец, для *произвольной* степени r это многочлен

$$x^r - x^{r-1} - \ldots - 1$$

для промежутка $(1; 2)$ и многочлен

$$x^r - (k+1)x^{r-1} + 1$$

для промежутка $(k; k+1)$.

Все перечисленные многочлены неприводимы и являются многочленами Пизо.

Известно и *наименьшее* не целое число Пизо. Это корень уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0,$$

равный (по формуле Кардано)

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{18}}\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{69}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{69}}\right).$$

Доказано также, что множество чисел Пизо замкнуто, т.е. если последовательность α_n, состоящая из чисел Пизо, имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta,$$

то число β является числом Пизо.

Вопрос о существовании неалгебраических чисел $\alpha > 1$, обладающих свойством Пизо, открыт. Однако доказано, что если $\{\{\alpha^n\}\}$ стремится к нулю достаточно быстро, точнее – если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \{\{\alpha^n\}\}^2$ сходится, то α является алгебраическим числом и, следовательно (в силу теоремы 3), – числом Пизо.

Заключение

Впервые публикации о числах Пизо появились в научной литературе в 1946 году. Авторами их были французский математик Пизо и индийский математик Виджаяраргхаван. В последующие годы неоднократно появлялись статьи о числах Пизо. В самое последнее время обнаружена связь чисел Пизо с теорией квазикристаллов в физике.

В 2000 году задача о числах Пизо была предложена школьникам – участникам конференции Турнира городов. Почти элементарное доказательство свойств чисел Пизо и подборка задач об этих числах были разработаны А.Канелем-Беловым, С.Дориченко и автором этой статьи.

Поправка. В пятом номере журнала на с.11 допущена опечатка. Второй абзац в правой колонке должен быть таким:

Но тогда

$$A_{N+k} = \left(\frac{p}{q}\right)^k A_N$$

при всех $k > 1$. Это невозможно, так как A_N не делится на q^k при достаточно больших k, т.е. A_{N+k} – не целое.

Университеты Германии

А.ВАСИЛЬЕВ

В ПРЕДЕЛАХ СОВРЕМЕННЫХ ГРАНИЦ ГЕРМАНИИ *Гейдельбергский университет* имени Карла Рупрехта, основанный в 1386 году, является старейшим (хотя первым собственно германским университетом был Пражский университет, основанный еще в 1348 году). В ту пору в Гейдельберге проживало не более 3500 человек, а университет привлек в него еще около 600 студентов. Девизом университета стала фраза на его печати «Книга знаний всегда открыта» (Semper apertus).

Во второй половине XVI века Гейдельбергский университет переживал период расцвета, являясь, по сути, академическим и культурным центром Европы. С началом тридцатилетней войны, однако, положение университета резко ухудшилось, а его знаменитая библиотека была похищена из церковного хранилища и перевезена в Рим. Лишь в начале XIX века великий герцог Карл Фридрих восстановил пришедший в упадок университет и дал ему государственные гарантии.

С Гейдельбергом связаны многие выдающиеся философы и исследователи. Здесь работали Георг Гегель и Людвиг Фейербах, преподавал психологию и философию экзистенциализма Карл Ясперс.

Профессор Гейдельбергского университета Густав Кирхгоф в середине XIX века сформулировал ряд основных законов электротехники, спектроскопии и теории излучения черного тела. Законы излучения черного тела, впоследствии объясненные в рамках модели атома Бора, способствовали развитию квантовой механики. В сотрудничестве с Робертом Бунзеном, также профессором Гейдельбергского университета, Кирхгоф открыл химические элементы цезий и рубидий. Филипп Ленард в 1905 году был удостоен Нобелевской премии по физике за исследование катодных лучей. Его работы лежат в основе многих современных информационных и коммуникационных технологий. В Гейдельберге родился Вольфганг Кеттерле, лауреат Нобелевской премии по физике 2001 года за исследование лазерного охлаждения и захвата ультрахолодных атомов. Он является одним из авторов открытия Бозе-Эйнштейновской конденсации газов.

С университетом Лейпцига, основанном в 1409 году, связаны имена многих представителей немецкой культуры. Среди них философы Готхольд Лессинг и Фридрих Ницше, композиторы Роберт Шуман и Рихард Вагнер. Из знаменитых физиков следует упомянуть Густава Герца, удостоенного Нобелевской премии 1925 года за исследование прохождения электронов через газы, и Вернера Гейзенберга, лауреата Нобелевской премии 1932 года за создание матричной формулировки квантовой механики.

Тюбингенский университет был основан в 1477 году первым герцогом Вюртембергским Эберхардом VI, воспринявшим идеи европейского возрождения в своих поездках по Италии. Этот университет сыграл важную роль в эпоху протестантской реформации, в нем сформировались основы будущей школьной системы Германии. Среди его знаменитых воспитанников астроном Иоганн Кеплер, поэт Фридрих Гёльдерлин, философы Фридрих Шеллинг и Георг Гегель. Расцвет Тюбингенского университета пришелся на середину XIX века, когда в нем был создан первый в Германии факультет естественных наук.

Марбургский университет, основанный в 1527 году и носящий имя его основатели Филиппа I, является первым и старейшим протестантским университетом. Позиции этого университета особенно сильны в философии, теологии и гуманитарных науках. Наряду с этим, в нем преподавали выдающиеся химики Роберт Бунзен и Отто Ган и первый лауреат Нобелевской премии по медицине (1901 г.) Эмиль Беринг. Среди знаменитых студентов Марбургского университета Михаил Ломоносов, братья Гримм, Борис Пастернак.

Расцвет *Йенского университета*, основанного в 1558 году, наступил в конце XVIII – начале XIX века, когда преподавание в нем вели такие выдающиеся профессора, как Иоганн Фихте, Георг Гегель, Фридрих Шлегель и Иоганн Шиллер. В эти годы покровительство университету оказывал патрон Гёте герцог Карл Август. Отличительной чертой студентов Йенского университета было исключительное свободолюбие и ревнивое отношение к кодексу чести, что проявлялось в бесчисленных дуэлях. В конце XIX века работы Карла Цейсса и Эрнста Аббе по созданию точных оптических приборов дали новый импульс развитию не только Йенского университета, но и всей германской промышленности и науки.

Как и другие средневековые учебные заведения, все упомянутые университеты сыграли выдающуюся роль в формировании европейской цивилизации. Все они создавались по образу Болонского университета, прошли через лютеранскую реформацию и остались крупнейшими центрами немецкой культуры.

Новый этап в развитии высшей школы Германии связан с образованием в 1809 году *Берлинского университета*. Его концепция, основанная на единстве обучения и науки, была разработана Вильгельмом Гумбольдтом в начале XIX века, а в настоящее время стала основой университетского образования. При создании Берлинского университета его структура полностью

(Продолжение см. на с. 22)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 февраля 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1976» или «Ф1983». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1976 и М1977 предлагались на весеннем Турнире городов, а задача М1979 – на 5-м Турнире математических боев памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М1976 – М1980, Ф1983–Ф1987

М1976. Пусть N – любое натуральное число. Докажите, что в десятичной записи либо числа N, либо числа $3N$ найдется одна из цифр 1, 2, 9.

Р.Женодаров

М1977. В первом ряду шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а в последнем ряду – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, передвигая по одному ферзю за ход. Ферзь ходит по вертикали, горизонтали или диагонали на любое число клеток (если на его пути нет других ферзей).

С.Токарев

М1978. Биссектрисы углов BAD и BCD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на диагонали BD. Точка M – середина отрезка BD. Прямая, параллельная AD и проходящая через C, пересекает луч AM в точке P, лежащей вне четырехугольника. Докажите, что $DP = DC$.

В.Шмаров (ученик 9 кл.)

М1979. На прямолинейной дороге стоят несколько светофоров. На каждом светофоре красный свет и зеленый свет горят по равному целому количеству минут (для разных светофоров эти количества могут различаться). Автогонщик в каждый момент либо едет с фиксированной скоростью, либо стоит на красный свет у светофора. Он изучил режим работы светофоров и утверждает, что, выехав в соответствующее время, он может доехать от начала до конца за 30 или 32 минуты, но не может доехать за 31 минуту. Могут ли его слова оказаться правдой? (Если гонщик подъезжает к светофору в момент переключения света, он считает, что свет уже переключился.)

И.Богданов

М1980. Докажите, что любой выпуклый центрально-симметричный многоугольник площади 1 можно поместить в некоторый центрально-симметричный шестиугольник площади $\frac{4}{3}$.

В.Дольников

Ф1983. В системе, изображенной на рисунке 1, все грузы одинаковые, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нити очень легкие и нерастяжимые. В начальный момент грузы удерживают так, что нити натянуты, а при их отпускании движение начинается без рывков. Найдите ускорения блоков. Свободные куски нитей вертикальны.

А.Блоков

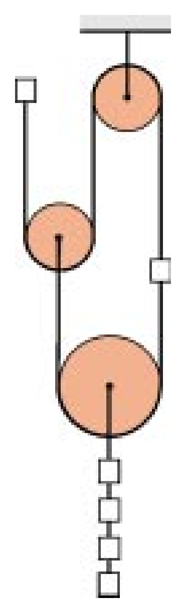


Рис. 1

Ф1984. Моль гелия находится в сосуде объемом 10 л при температуре 300 К. Объем газа увеличивают, при этом теплоемкость его во всем процессе равна $C = 1000$ Дж/К (и остается постоянной!). Оцените изменение температуры газа при его расширении в 20 раз.

Р.Александров

Ф1985. Батарейку напряжением $U = 6$ В с малым внутренним сопротивлением подключают к цепи, изображенной на рисунке 2. Конденсаторы имеют одинаковые емкости $C = 100$ мкФ,

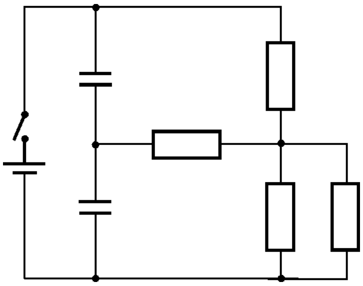


Рис. 2

резисторы также одинаковые, сопротивлением R = 10 кОм каждый. Какой полный заряд протечет через «горизонтальный» резистор? Какое количество теплоты в нем выделится?

А.Зильберман

Ф1986. Катушка содержит N = 1000 витков провода и намотана на тороидальный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью. Катушка включена в сеть переменного напряжения U = 36 В последовательно с резистором сопротивлением R = 100 Ом. От части катушки (n = 250 витков от одного из концов намотки) сделан отвод, и эта часть катушки замкнута проводником, имеющим очень малое сопротивление. Какой ток течет по этому проводнику? Рассеянием магнитного потока пренебречь. Сопротивление провода, которым намотана катушка, считать малым.

З.Рафаилов

Ф1987. Для уменьшения отражения света от поверхности линзы применяют просветляющий слой из материала с меньшим коэффициентом преломления, чем у стекла линзы. Расчет этого слоя обычно производят для длины волны 0,55 мкм, соответствующей зеленому цвету. Как изменится при этом отражение света для красного и фиолетового краев диапазона видимого света?

А.Светов

Решения задач М1951 – М1960, Ф1968 – Ф1972

М1951. *Имеются два разных расположения одних и тех же ладей на шахматной доске, причем известно, что одно получено из другого после двух ходов каждой ладьи. Всегда ли можно указать третье расположение этих же ладей на этой доске, из которого каждое из двух данных расположений достигается одним ходом каждой ладьи?*

Ответ: нет.

Относительно двух первоначальных расположений одной ладьи можно указать два возможных промежуточных ее положения. Если же брать большее количество пар начальных расположений ладей, то пары их возможных промежуточных положений могут иметь пересечения, и может оказаться, что объединение клеток, составляющих эти пары, содержит меньше элементов, чем всего ладей. Вот возможный пример.

Ладья:	1	2	3	4	5
Ее позиция №1:	b4,	c3,	d2,	b3,	c2
Ее позиция №2:	c5,	d4,	e3,	d5,	e4

Имеются всего четыре клетки b5, c4, d3, e2 для расстановки на них пяти ладей.

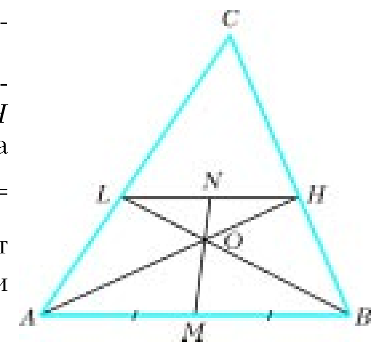
С.Волчёнков

М1952. *Пусть AH – высота, BL – биссектриса, CM – медиана треугольника ABC.*

а) Докажите, что AH, BL и CM пересекаются в одной точке в точности если $LH \parallel AB$.

б) Докажите, что $LH \parallel AB$ в точности если $\dfrac{\sin\angle A}{\cos\angle C} = \operatorname{tg}\angle B$.

а) В этом пункте L и H – произвольные (не обязательно совпадающие с основаниями биссектрисы и высоты) внутренние точки отрезков AC и BC соответственно.



Пусть $LH \parallel AB$, N – точка пересечения MO с LH (см. рисунок). Тогда $\dfrac{LN}{MB} = \dfrac{NO}{OM} = \dfrac{NH}{AM}$, $LN = NH$. Значит, N лежит на медиане CM, откуда и O лежит на CM.

Пусть O лежит на CM. Проведем $LH' \parallel AB$. Так как BL и AH' пересекаются на медиане CM, то $H' = H$. Таким образом, $LH \parallel AB$.

б) Поскольку AH – высота, BL – биссектриса, условие $LH \parallel AB$, или $\dfrac{BH}{CH} = \dfrac{AL}{CL}$, можно переписать в виде

$$\frac{c\cos\angle B}{b\cos\angle C} = \frac{c}{a},$$

т.е., поскольку

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B},$$

– в виде

$$\frac{\sin\angle A}{\cos\angle C} = \operatorname{tg}\angle B.$$

А.Полянский, В.Сендеров

М1953. *Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр. Известно, что его можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники 2×1. Докажите, что у него есть хотя бы одна сторона четной длины.*

Пусть каждый прямоугольник 2×1 составлен из двух разноцветных клеток – белой и черной. Поскольку многоугольник можно разрезать на такие прямоугольники, то в нем поровну черных и белых клеток. Посчитаем суммарные периметры черных и белых клеток, входящих в многоугольник. Для черных клеток – это та часть периметра, к которой изнутри прилегают черные клетки (будем эту часть называть черными отрезками периметра), и вся сетка, которая лежит внутри многоугольника. Для белых – белые отрезки периметра и вся сетка, которая лежит внутри многоугольника. Тогда белых отрезков периметра столько же, сколько черных. Но если все стороны нечетной длины и граница состоит из одного куска (вот тут и пользуемся тем, что многоугольник без дыр), то все стороны начинаются и заканчиваются отрезком одного и того же цвета. Но тогда такого цвета будет больше.

С.Дориченко

М1954. *Найдите все точные квадраты вида $\overline{a0\ldots0b}$, где a и b – отличные от нуля цифры.*

Ответ: 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Пусть $a \cdot 10^t + b = c^2$, где $t \ge 2$; тогда b = 1, 4 или 9, откуда $\sqrt{b} \in \mathbf{Z}$.

Получили

$$a \cdot 10^t = \left(c + \sqrt{b}\right)\left(c - \sqrt{b}\right) = de,$$

где $d, e \in \mathbf{N}$, $|d - e| = 2$, 4 или 6.

Пусть d делится на 5. Тогда $d \ge 2 \cdot 5^t$, $9 \cdot 2^{t-1} \ge$ $\ge e \ge 2 \cdot 5^t - 6$, $\frac{24}{25} \ge \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^t + \frac{6}{5^t} \ge 2$.

Противоречие.

В.Сендеров

М1955. *Одна из проекций точки D на стороны треугольника ABC является серединой отрезка между двумя другими. Докажите, что одна из проекций точки C на стороны треугольника ABD также является серединой отрезка между двумя другими.*

Так как проекции точки D на стороны ΔABC лежат на одной прямой, точки A, B, C, D лежат на одной окружности. Пусть для определенности четырехугольник $ABCD$ – выпуклый, и A', B', C' – проекции D на BC, CA, AB. Так как четырехугольник $A'DB'C$ – вписанный, $A'B' = CD \sin \angle ACB$. Аналогично, $B'C' = AD \sin \angle CAB$. Следовательно, условие $A'B' =$ $= B'C'$ равносильно условию $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Отсюда сразу вытекает утверждение задачи.

А.Заславский

М1956. *Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 2005 натуральных чисел таких, что произведение любых четырех из них делится на куб их суммы? А бесконечная арифметическая прогрессия с такими же свойствами?*

Ответ на первый вопрос положителен. Именно, пусть $\{a_i\}_{i=1}^{2005}$ – произвольная возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел, D – некоторое кратное всех чисел вида $(b + c + d + e)^3$, где b, c, d, e – члены этой прогрессии. Тогда, очевидно, $\{Da_i\}_{i=1}^{2005}$ – искомая прогрессия.

Докажем теперь, что *никакая* возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел свойством задачи не обладает. Докажем более сильное утверждение: произведение любых четырех членов такой последовательности не может делиться на их сумму. Предположим противное и обозначим $A = a_1a_2a_3$, $B =$ $= a_1 + a_2 + a_3$, $x = a_n$, где $n > 3$. Имеем: $y = \frac{Ax}{B + x}$ – целое число. С другой стороны, $y \to A$ при $x \to \infty$. Значит, при достаточно больших x имеем $y = A$, откуда $B = 0$. Противоречие.

Вот несколько иное рассуждение: поскольку $y = \frac{A\left((x + B) - B\right)}{x + B}$, число $\frac{AB}{x + B}$ при сколь угодно больших x является целым (вариант: число имеет бесконечно много различных натуральных делителей).

Попробуем ответить еще на некоторые близкие к задаче вопросы.

При каких натуральных n существует такая бесконечная возрастающая

а) последовательность натуральных чисел,

б) арифметическая прогрессия из натуральных чисел,

что произведение любых n *последовательных* ее членов делится на их сумму?

Нетрудно построить как последовательность а) для любого $n > 0$, так и прогрессию б) для любого нечетного n. Несколько сложнее доказать, что ни для какого четного n прогрессий б) не существует.

Заметим, что если в условиях пункта б) потребовать делимости на сумму вторых либо более высоких степеней членов, то окажется, что ни при каком натуральном n искомой прогрессии не существует. Рассматривая ситуацию, когда числитель и знаменатель также возводятся в некоторые натуральные степени, мы придем к следующему утверждению: «прогрессию с делением» можно построить в точности если n нечетно, степени слагаемых в знаменателе – первые, а степень числителя не ниже степени знаменателя.

Возможны и другие близкие формулировки. Например, существует такая бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел, что произведение любых n первых ее членов делится на их сумму.

И.Акулич, В.Сендеров

М1957. *Из полного набора домино выбрали несколько костяшек и выложили по правилам в один ряд. Докажите, что костяшки всего набора можно выложить в один ряд, в котором выбранные костяшки идут в том же порядке (может быть, не подряд).*

Рассмотрим полный граф на 7 вершинах и занумеруем вершины числами от 0 до 6. Каждый путь в этом графе соответствует некоторой цепочке выложенных по правилам доминошек. Если удалить из графа ребра, соответствующие выложенной цепи, то степень каждой вершины, кроме начальной и конечной, уменьшится на четное число, т.е. останется четной. В каждой компоненте такого графа будет существовать эйлеров цикл, кроме одной, куда попадут начальная и конечная вершины удаленной цепи. В этой компоненте будет существовать эйлеров путь между указанными вершинами.

Построим следующий эйлеров обход исходного графа.

1. Пройдем компоненту, содержащую начальную и конечную вершины цепи по эйлерову пути от конечной вершины цепи до начальной.
2. Продолжим путь вдоль цепи до ближайшей компоненты связности.
3. Обойдем эту компоненту по эйлерову циклу.
4. Повторим пункты 2 и 3, если есть еще непройденные ребра.

Так как вдоль цепи встретятся все компоненты, то все будет пройдено, т.е. будет построена цепочка из всех костяшек полного набора, внутри которой костяшки ранее выложенной цепочки идут в том же порядке.

С.Волчёнков

М1958. *Можно найти пару натуральных чисел x и y, для которых x^2+xy+y^2 является квадратом целого числа, а также пару натуральных чисел x и y, для которых x^2-xy+y^2 является квадратом.*
Докажите, что нельзя найти пару натуральных чисел x и y, для которых оба числа x^2+xy+y^2 и x^2-xy+y^2 являются квадратами.

Докажем более сильное утверждение: произведение четырех натуральных чисел $z\pm a$, $z\pm 2a$, где $a>0$, не может быть точным квадратом.
Предположим противное. Тогда либо

$$\begin{cases} z^2-a^2=b^2,\\ z^2-4a^2=c^2, \end{cases} \qquad (1)$$

либо

$$\begin{cases} z^2-a^2=3b^2,\\ z^2-4a^2=3c^2. \end{cases}$$

Во втором случае из второго уравнения имеем $z=2z_1$, $c=2c_1$, где $z_1,c_1\in\boldsymbol{N}$. Подставляя это в равенства $a^2=b^2-c^2$, $z^2=4b^2-c^2$, мы приходим к системе $b^2-4c_1^2=a^2$, $b^2-c_1^2=z_1^2$ вида (1).
Рассмотрим первый случай.
Без ограничения общности считая $(z,a,b)=1$, из первого уравнения видим, что z нечетно. Поэтому из второго уравнения $a=uv$, $z=u^2+v^2$; подставим в первое:

$$u^4+u^2v^2+v^4=b^2. \qquad (2)$$

(Разумеется, вторую систему легко свести к такому уравнению и непосредственно.)
Докажем методом спуска, что (2) неразрешимо в натуральных числах.
Без ограничения общности будем считать, что $(u,v)=1$, а u – нечетно; тогда $v=2v_0$ (иначе $3\equiv b^2 \pmod 4$) и $b^2+(uv)^2=\left(u^2+v^2\right)^2$. Существуют m,n такие, что $(m,n)=1$, $uv_0=mn$, $u^2+v^2=m^2+n^2$. Так как $(u,v_0)=(m,n)=1$, то существуют A,B,C,D такие, что $(C,D)=1$, $u=AC$, $v_0=BD$, $m=AD$, $n=BC$. Имеем $\left(A^2-B^2\right)C^2=\left(A^2-4B^2\right)D^2$. Обозначим $\delta=\left(A^2-B^2,A^2-4B^2\right)$; $\delta=1$ либо $\delta=3$.
Пусть $\delta=1$. Так как $(C,D)=1$, то $C^2=\pm\left(A^2-4B^2\right)$, $D^2=\pm\left(A^2-B^2\right)$.
Если «–», то $A^2+C^2=4B^2$. Но $u=AC$ нечетно, откуда A, C нечетны, $A^2+C^2\equiv 2 \pmod 4$. Если «+», то $C^2+(2B)^2=A^2$, $D^2+B^2=A^2$. Так как $(A,C)=1$, то существуют U,V такие, что $UV=B$, $U^2+V^2=A$; $D^2=A^2-B^2=U^4+U^2V^2+V^4$, где $UV=B<2BD=v\le uv$.
Пусть $\delta=3$. Тогда

$$3C^2=\pm\left(A^2-4B^2\right),\ 3D^2=\pm\left(A^2-B^2\right).$$

Если «+», то $3\equiv 3C^2\equiv A^2\equiv 1 \pmod 4$.
Если «–», то $4B^2=4A^2+12D^2=A^2+3C^2$, $A^2+(2D)^2=C^2$. Существуют U,V такие, что $UV=D$, $U^2+V^2=C$. Но $C^2-D^2=B^2$, $U^4+U^2V^2+V^4=B^2$, где $UV=D<2BD=v\le uv$.
Замечание 1. Произведение четырех натуральных чисел $z\pm a$, $z\pm 3a$, где $a>0$, также не может быть точным квадратом. Это утверждение, как легко видеть, эквивалентно теореме 1 из решения задачи М1934. Далее, этим же свойством обладает и любая четверка $\{z\pm 2a, z\pm 3a\}$. Действительно, в противном случае мы имеем либо

$$\begin{cases} z^2-9a^2=b^2,\\ z^2-4a^2=c^2, \end{cases} \qquad (3)$$

либо

$$\begin{cases} z^2-9a^2=5b^2,\\ z^2-4a^2=5c^2. \end{cases}$$

Во втором случае $a^2=c^2-b^2$, $z^2+(2b)^2=9c^2$. Последнее равенство дает $z=3z_1$, $b=3b_1$, где $z_1,b_1\in\boldsymbol{N}$, – и мы приходим к системе $c^2-4b_1^2=z_1^2$, $c^2-9b_1^2=a^2$ вида (3). В первом случае, без ограничения общности считая $(z,a)=1$, имеем из второго уравнения $a=uv$, $z=u^2+v^2$. Подставив в первое, получаем $u^4-7u^2v^2+v^4=b^2$. Однако в 1912 году американский математик Г.К.Поклингтон доказал, что это уравнение не имеет решений в натуральных числах.
В то же время, наборы чисел $1^2,5^2,7^2$ и $4\cdot1^2, 4\cdot4^2, 4\cdot7^2, 4\cdot8^2$ дают примеры систем натуральных квадратов, каждая из которых имеет целый центр симметрии. Нетрудно показать, что обладающая этим свойством система натуральных квадратов может содержать любое количество элементов.
Замечание 2. Из доказанного при решении задачи утверждения следует, что натуральные числа $z\pm 2a$, $z\pm 4a$, где $a>0$, не могут одновременно быть точными квадратами. Далее, из предыдущего замечания ясно, что этим же свойством обладают и четверки $\{z\pm 2a, z\pm 3a\}$ и $\{z\pm 2a, z\pm 3\cdot(2a)\}$. Случай $\{z\pm 2a, z\pm 5a\}$ рассуждениями, аналогичными проведенным выше при рассмотрении случая $\{z\pm 2a, z\pm 3a\}$, сводится к уравнению $u^4-23u^2v^2+v^4=b^2$. Это уравнение не имеет решений в натуральных числах (это тоже доказал Поклингтон). Таким образом, мы получаем следующее.
Предложение. Пусть x, y, k – натуральные числа, $k\ne 2$, $k<7$. Тогда хотя бы одно из чисел $x^2+kxy+y^2$ и $x^2-kxy+y^2$ не является точным квадратом.
Замечание 3. Уравнения вида

$$x^4+kx^2y^2+y^4=z^2, \qquad (4)$$

где k – фиксированное целое число, $x,y,z\in\boldsymbol{N}$, не раз уже естественно возникали при решении числовых задач из «Задачника «Кванта». Так, в решении М1934 фигурировал случай $k=-1$, $x\ne y$, а в решении М1883

– уравнение $u^4+v^4=2z^2$, где $u \neq v$. Последнее уравнение, как показывает замена $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{|u-v|}{2}$, эквивалентно уравнению (4), где $k=6$. Эти уравнения, как и фигурирующие в решении настоящей задачи, не имеют решений.

Однако нетривиальные решения существуют не только в случае $k=\pm 2$. Так, при $k=8$ решением является тройка $(x, y, z)=(2,1,7)$, при любом $k=-t^2$, где $t \in \boldsymbol{N}$, – тройка $(t,1,1)$, при $k=-15$ – тройка $(24, 95, 1951)$. Ясно, что любое уравнение (4), имеющее решение в натуральных числах, имеет бесконечно много таких решений.

В.Произволов, В.Сендеров

М1959. *Имеются n квадратных трехчленов с буквенными коэффициентами и прозрачный мешок, содержащий 3n натуральных чисел. Двое ходят поочередно: каждый своим ходом берет из мешка число и заменяет им какой-либо из еще не замененных буквенных коэффициентов. Первый игрок хочет, чтобы каждый из n трехчленов имел хотя бы один целый корень. Может ли второй игрок всегда (при любом содержимом мешка и любой стратегии первого) этому помешать, если а) n = 1; б) n = 2; в) n > 2?*

а) Нет. В случае $\mathrm{M}=\{1,2,3\}$ первому достаточно первым своим ходом сделать коэффициент при x равным 3.

б) Да. Второму достаточно первым своим ходом сделать вторым коэффициентом уцелевшего трехчлена наименьшее из уцелевших чисел.

в) Да – аналогично б).

Н.Агаханов, В.Сендеров

М1960. *Проекции внутренней точки правильного тетраэдра на грани соединены отрезками с вершинами своих граней. В результате поверхность тетраэдра оказалась разделенной на шесть областей. Каждая пара областей, содержащих пару противоположных ребер тетраэдра, окрашивается в свой цвет: желтый, синий или красный (рис.1). Докажите, что площадь, занятая каждым цветом, одна и та же.*

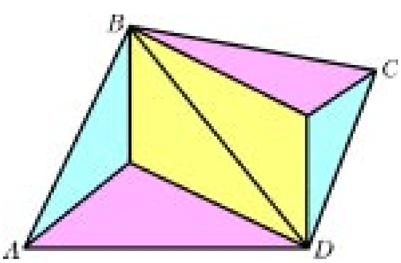


Рис. 1

Проекции внутренней точки P на грани правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 обозначим через A_1, B_1, C_1 и D_1. Из каждой из этих четырех точек в своей грани опустим по три перпендикуляра на стороны этой грани. Затем сделаем развертку поверхности тетраэдра в виде параллелограмма (рис.2).

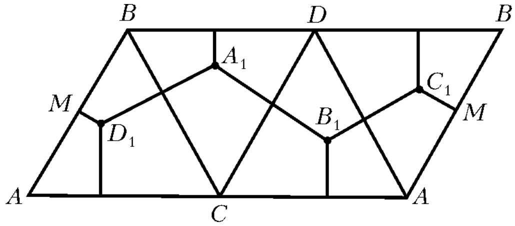


Рис. 2

Легко доказать, что (на развертке)

$$MD_1+A_1B_1+C_1M=D_1A_1+B_1C_1=4r,$$

где r – радиус вписанной в грань окружности. Отсюда сразу следует утверждение задачи, что любым цветом закрашена ровно треть поверхности тетраэдра.

В.Произволов

Ф1968. *Капля ртути на чистой горизонтальной поверхности стекла и капля воды на ворсистой поверхности травинки подобны друг другу по форме. Оцените отношение масс этих капель. Плотности ртути и воды равны $\rho_\text{р}=13{,}6$ г/см^3 и $\rho_\text{в}=1$ г/см^3, а их коэффициенты поверхностного натяжения составляют $\sigma_\text{р}=0{,}46$ Н/м и $\sigma_\text{в}=0{,}07$ Н/м соответственно.*

Введем какой-нибудь характерный размер капли, по которому можно полностью определить ее размеры, если известна форма капли. Например, выберем в качестве такого размера высоту капли H.

Форма капли заданного объема V, который пропорционален H^3, определяется условием минимума суммарной потенциальной энергии капли. Эта энергия складывается из энергии E_1, связанной с поверхностным натяжением жидкости, и энергии E_2, обусловленной полем тяжести:

$$E_1 \sim \sigma H^2, \quad E_2 \sim \rho g H^4.$$

Одна из составляющих суммарной энергии пропорциональна отношению V/H, а другая – произведению VH. Отношение E_1/E_2 для капель одинаковой формы должно быть одинаково, поскольку именно им и определяется форма капли. Поэтому должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{\sigma_\text{в}H_\text{в}^2}{\rho_\text{в}gH_\text{в}^4}=\frac{\sigma_\text{р}H_\text{р}^2}{\rho_\text{р}gH_\text{р}^4}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{H_\text{р}^2}{H_\text{в}^2}=\frac{\sigma_\text{р}\rho_\text{в}}{\sigma_\text{в}\rho_\text{р}}.$$

Отношение масс капли ртути и капли воды, таким образом, равно

$$\frac{M_\text{р}}{M_\text{в}}=\frac{\rho_\text{р}H_\text{р}^3}{\rho_\text{в}H_\text{в}^3}=\frac{\rho_\text{р}}{\rho_\text{в}}\left(\frac{\sigma_\text{р}\rho_\text{в}}{\sigma_\text{в}\rho_\text{р}}\right)^{3/2}=\left(\frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{р}}\right)^{1/2}\left(\frac{\sigma_\text{р}}{\sigma_\text{в}}\right)^{3/2}=$$

$$=\left(\frac{1}{13{,}6}\right)^{1/2}\left(\frac{0{,}46}{0{,}07}\right)^{3/2}\approx 0{,}271\cdot 16{,}85\approx 4{,}6.$$

С.Варламов

Ф1969. *Горизонтальный закрытый теплоизолированный цилиндр разделен на две части тонким теплопроводящим поршнем, который прикреплен пружиной к одной из торцевых стенок цилиндра. Слева и справа от поршня находятся по ν молей идеального одно-*

атомного газа. Начальная температура системы T, длина цилиндра 2l, собственная длина пружины l/2, удлинение пружины в состоянии равновесия x. В поршне проделали отверстие. На сколько изменится температура системы после установления нового состояния равновесия? Теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины пренебречь. Считать, что трения нет.

В исходном состоянии сила упругости пружины была уравновешена разностью сил давления газов, находящихся по разные стороны от поршня:

$$\frac{\nu RT}{3l/2-x}-\frac{\nu RT}{l/2+x}=-kx\ ,$$

где k – жесткость пружины. Отсюда находим жесткость пружины:

$$k=\frac{\nu RT}{x}\left(\frac{1}{l/2+x}-\frac{1}{3l/2-x}\right).$$

После того, как в поршне проделали отверстие, давления по разные стороны от поршня стали одинаковыми, а удлинение пружины стало нулевым. При этом потенциальная энергия $E=kx^2/2$, которая была запасена в сжатой пружине, пошла на изменение внутренней энергии газа:

$$\frac{kx^2}{2}=\frac{3}{2}\cdot 2\nu R\Delta T\ .$$

Отсюда находим искомое изменение температуры газа:

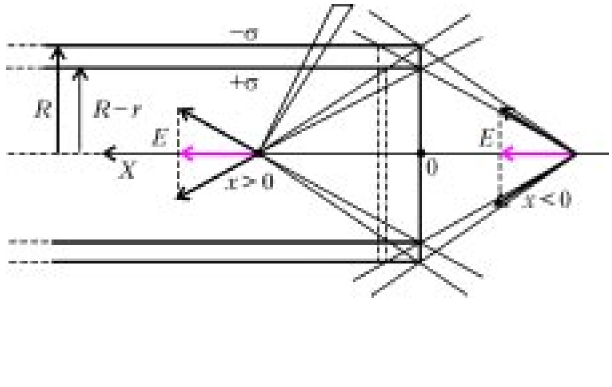
$$\Delta T=\frac{kx^2}{6\nu R}=\frac{x}{6}\left(\frac{1}{l/2+x}-\frac{1}{3l/2+x}\right)T=$$

$$=\frac{2x}{3}\frac{l-2x}{(l+2x)(l-2x)}T\ .$$

О.Шведов

Ф1970. *Две очень длинные цилиндрические трубы имеют одну и ту же длину, а их радиусы равны R и R − r, причем $r \ll R$. Труба меньшего радиуса вставлена в бóльшую так, что их оси и торцы совпадают. Трубы заряжены равномерно по площади электрическими зарядами: внутренняя с поверхностной плотностью заряда +σ, а внешняя – с поверхностной плотностью −σ. На оси этой системы вблизи от одного из торцов измеряют напряженность электростатического поля E. Найдите, как зависит E от расстояния x до этого торца.*

Выберем на оси системы точку, расположенную вблизи одного из торцов, и построим произвольно ориентированную коническую поверхность с вершиной в этой точке и малым телесным углом (см. рисунок).



Если эта поверхность пересекает и положительно и отрицательно заряженные цилиндры, то «вырезаемые из них заряды пропорциональны соответствующей поверхностной плотности зарядов на цилиндрах, квадратам расстояний до этих зарядов и некоторой одинаковой функции, зависящей только от параметров телесного угла. Указанные заряды создают в выбранной точке нулевое суммарное поле, поскольку оно пропорционально величинам этих зарядов и обратно пропорционально квадратам расстояний от зарядов до этой точки. Если точка наблюдения расположена внутри цилиндров (считаем, что при этом $x>0$, т.е. ось X направлена внутрь цилиндров, а начало отсчета находится на их торце), то нескомпенсированными окажутся только участки положительно заряженного внутреннего цилиндра в форме кольца вблизи торца цилиндра. Если же $x<0$, т.е. точка наблюдения находится вне цилиндров, то нескомпенсированными окажутся участки отрицательно заряженного внешнего цилиндра, также имеющие форму кольца. Заметим, что другой торец цилиндров, согласно условию задачи, находится очень далеко и полем от него можно пренебречь.

Поле кольца радиусом R, имеющего равномерно распределенный по длине заряд Q, на оси кольца на расстоянии x от его плоскости направлено вдоль оси и равно

$$E=\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\ .$$

Ширина положительно заряженного кольца (при $x>0$) равна, как видно из рисунка, $\frac{r}{R}x$, а ширина отрицательно заряженного кольца (при $x<0$) равна $\frac{r}{R-r}(-x)\approx\frac{r}{R}(-x)$, поскольку $r\ll R$. Заряды колец равны, соответственно,

$$Q_+=\sigma\cdot 2\pi(R-r)\frac{r}{R}x\approx 2\pi\sigma rx$$

и

$$Q_-\approx-\sigma\cdot 2\pi R\frac{r}{R}(-x)\approx 2\pi\sigma rx\ .$$

Заметим, что отрицательный знак Q_- при такой записи получается автоматически – за счет того, что в данном случае $x<0$. Объединяя оба выражения для любых значений x, можно записать

$$Q=2\pi\sigma rx\ .$$

Подставляя это значение Q в выражение для напряженности поля заряженного кольца, получаем, что проекция вектора напряженности электрического поля на ось X вблизи торца цилиндров равна

$$E\approx\frac{\sigma rx^2}{2\varepsilon_0\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\ .$$

С.Варламов

Ф1971. *Имеется бесконечная сетка, составленная из одинаковых проволочек (рис.1). Известно, что сопро-*

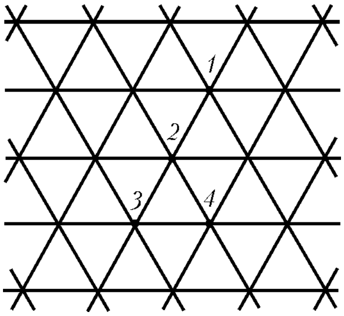


Рис. 1

тивление, измеренное между точками 1 и 2 этой сетки, равно R, а между точками 1 и 3 – r (на самом деле, эти сопротивления связаны определенным образом, но не будем усложнять себе задачу). Найдите сопротивление между точками 1 и 4, выразив его через R и r.

Во время измерений потенциалы в очень далеких точках (узлах сетки) равны нулю. Поэтому, если мы соединим их хорошо проводящим проводом, то ничего не изменится. Назовем этот провод «бесконечность». Пусть во время измерений сопротивления напряжение между точками *1* и *2*, измеренное идеальным вольтметром, равно U, а ток в измерительной цепи, содержащей источник питания и идеальный амперметр, равен I. Возьмем теперь два одинаковых источника, каждый из которых дает фиксированный ток I. Первый источник подключим к точке *1* и «бесконечности» так, чтобы ток I тек по сетке от точки *1* к «бесконечности». При этом распределение тока по разным направлениям (по шести проводникам, подключенным к точке *1*) равномерно. Второй источник подсоединим к точке *2* и «бесконечности» так, чтобы он снимал с точки *2* ток I, текущий к ней по сетке из «бесконечности». В силу линейности цепи, ток в любой ее точке теперь будет суммой токов двух источников, для каждого из которых распределение тока симметрично относительно точки, к которой он подключен. Также мы видим, что получили исходную схему.

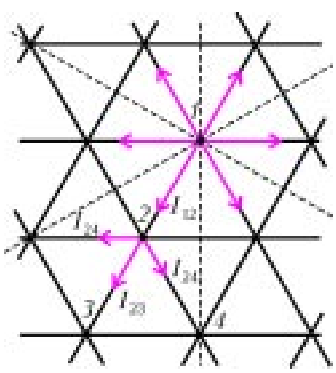


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда один источник подключен к точке *1* и «бесконечности». На рисунке 2 показаны участки (пунктирные линии их пересекают), где ток не идет из соображений симметрии. Очевидно, что

$$I_{12} = I_{23} + 2I_{24} \text{ и } I = 6I_{12}.$$

При измерении $R_{12} = R$ ток, текущий по проволочке *1–2*, равен $2I_{12}$, поскольку токи двух источников складываются. Напряжение между точками *1* и *2* равно $2r_0 I_{12}$, где r_0 – сопротивление одной проволочки. Отсюда

$$R_{12} = R = \frac{2r_0 I_{12}}{I} = \frac{r_0}{3}.$$

При измерении $R_{13} = r$ напряжение между точками *1* и *3* равно $2r_0\left(I_{12} + I_{23}\right)$, поскольку текущий по проволочкам *1–2* и *2–3* суммарный ток одинаков и равен $I_{12} + I_{23}$, а сопротивление равно

$$R_{13} = r = \frac{2r_0\left(I_{12} + I_{23}\right)}{I} = R(1 + a).$$

Отсюда для $a = I_{23}/I_{12}$ находим

$$a = \frac{r - R}{R}.$$

Аналогично получаем, что при измерении R_{14} текущий по проволочками *1–2* и *2–4* суммарный ток одинаков и равен $I_{12} + I_{24}$, напряжение между точками *1* и *4* равно $2r_0\left(I_{12} + I_{24}\right)$, и сопротивление равно

$$R_{14} = \frac{2r_0\left(I_{12} + I_{24}\right)}{I} = R(1 + b).$$

Для $b = I_{24}/I_{12}$ из этого уравнения находим

$$b = \frac{R_{14} - R}{R}.$$

Поскольку

$$I_{12} = I_{23} + 2I_{24}, \text{ или } 1 = a + 2b,$$

то подставляя в последнее уравнение a и b, выраженные через R, r и R_{14}, получаем

$$1 = \frac{r - R}{R} + \frac{2\left(R_{14} - R\right)}{R},$$

откуда

$$R_{14} = 2R - \frac{r}{2}.$$

Е.Антышев

Ф1972. *На высоте h от горизонтальной плоскости находится тонкое непроводящее кольцо массой m и радиусом R, по которому равномерно распределен заряд q. В момент времени t = 0 кольцо начинает падать без начальной скорости, сохраняя в полете горизонтальное положение. Одновременно с началом падения кольца включается магнитное поле, ось симметрии которого совпадает с осью кольца. Вблизи кольца магнитное поле однородно, направлено вертикально, а его индукция нарастает по закону* $B = kt^2$*, где k – постоянная величина. Упав на плоскость, кольцо быстро останавливается и прилипает к ней. Найдите количество теплоты, которое при этом выделится в данной системе. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения равно g.*

При падении кольца поток вектора магнитной индукции через него будет изменяться, вследствие чего возникнет вихревое электрическое поле, силовые линии которого лежат в плоскости кольца. Это поле будет действовать на распределенный по кольцу заряд, и кольцо будет раскручиваться.

Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, при изменении потока $\Phi = BS$ через кольцо площадью $S = \pi R^2$ возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

При этом напряженность вихревого электрического поля, которое действует на заряды кольца, равна

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R} = -\frac{R}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Следовательно, раскручивающая кольцо сила равна

$$F = qE = -\frac{qR}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t},$$

а сообщаемое ею кольцу угловое ускорение по модулю равно

$$\frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} = \frac{|F|}{mR} = \frac{q}{2m}\frac{|\Delta B|}{\Delta t},$$

где $\Delta\omega$ – приращение угловой скорости кольца за малое время Δt. Из последней формулы следует, что

$$\Delta\omega = \frac{q}{2m}\Delta B,$$

поскольку и угловая скорость кольца ω, и величина индукции магнитного поля B возрастают со временем. Кольцо коснется плоскости через время $\tau = \sqrt{2h/g}$ после начала падения. За это время оно приобретет угловую скорость

$$\omega(\tau) = \frac{q}{2m}B(\tau) = \frac{q}{2m}k\tau^2 = \frac{kqh}{mg}.$$

Так как по условию задачи кольцо, упав на плоскость, быстро останавливается и прилипает к ней, то вся приобретенная кольцом за время падения кинетическая энергия перейдет в тепло (поскольку время торможения кольца очень мало, можно пренебречь работой, которую совершают за это время над кольцом силы, действующие со стороны вихревого поля). Значит,

$$Q = mgh + \frac{m\omega^2(\tau)R^2}{2} = mgh + \frac{m}{2}\left(\frac{kqhR}{mg}\right)^2 =$$

$$= mgh + \frac{k^2q^2h^2R^2}{2mg^2} = mgh\left(1 + \frac{k^2q^2R^2h}{2m^2g^3}\right).$$

Замечание. При решении этой задачи можно пренебречь магнитным полем, создаваемым вращающимся заряженным кольцом, и вкладом этого поля в полный магнитный поток, пронизывающий кольцо. Такое приближение обычно используется при решении ряда аналогичных задач, например о падении проводящей рамки или о движении перемычки по рельсам в магнитном поле.

К.Башевой

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Университеты Германии

(Начало см. на с. 14)

отвечала организации средневековых университетов с классическим набором юридического, медицинского, философского и богословского факультетов. Однако под влиянием передовых философов того времени Гегеля, Фихте и Шлейермахера, а также естествоиспытателя Александра Гумбольдта в стенах университета с самого начала получили развитие многие естественнонаучные дисциплины.

Первое здание Берлинскому университету было подарено прусским королем Фридрихом Вильгельмом III (с 1828 по 1949 год университет носил его имя). По мере развития университета новые подразделения и институты интегрировались в его структуру — в частности, в нее вошли знаменитая Клиника Шарите и Музей натуральной истории.

Расцвет Берлинского университета пришелся на первые декады XX века. Именно в эти годы его профессорам было присуждено наибольшее количество Нобелевских премий (всего – 29!). Так, первая Нобелевская премия по химии 1901 года была вручена Якобу Вант-Гоффу за исследование динамики химических реакций, а премия по литературе 1902 года была присуждена историку античности Теодору Моммзену. Среди выдающихся ученых Берлинского университета лауреаты Нобелевской премии Отто Ган, Макс Лауэ, Макс Планк, Альберт Эйнштейн, Вернер Гейзенберг, Эрвин Шрёдингер, Ханс Бете и Макс Борн. Кажется, весь цвет экспериментальной и теоретической физики того времени собрался в Берлине.

Этот яркий период завершился в 1933 году с изменением политической обстановки в стране и изгнанием из стен университета инакомыслящих. После второй мировой войны раскол в среде университетских профессоров только усилился, так что новый Свободный университет был основан в Западном Берлине. С 1949 года Берлинский университет стал носить имена братьев Александра и Вильгельма Гумбольдтов.

После объединения Германии развитию Гумбольдтова университета был дан новый импульс. Он получил новые корпуса в пригороде Берлина, где сконцентрированы факультеты естественнонаучного направления. Берлинский университет активно участвует во всех европейских образовательных программах, более 10 процентов из 40000 студентов – иностранцы. В настоящее время степень магистра в Берлинском университете присуждается по 59 различным направлениям. Традиционно сильны его связи с восточноевропейскими университетами и, в частности, с Московским государственным университетом им. М.В.Ломоносова.

Задачи

1. Я собрал коллекцию старых календарей за последние 30 лет. Какими из них можно пользоваться в 2006 году? (Числа месяца и дни недели в используемом календаре должны соответствовать числам месяца и дням недели в календаре 2006 года.)

А.Ряховский

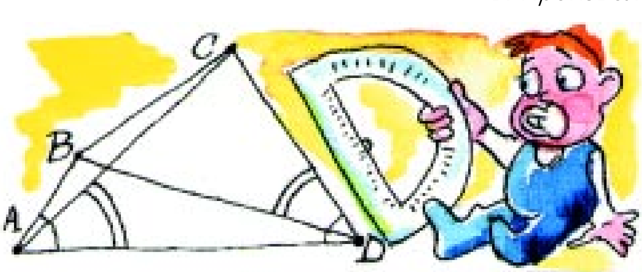
2. В классе на доске кто-то мелом написал: «С НОВЫМ ГОДОМ!» Дед Мороз и Снегурочка играют, стирая по очереди буквы (начинает Снегурочка). Каждый может своим ходом стереть либо одну любую букву, либо сразу несколько одинаковых букв. Выигрывает тот, кто сотрет последнюю букву и оставит на доске только восклицательный знак.

Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре партнера?

И. Акулич

3. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, а также $\angle CAD = \angle CDB$. Докажите, что $AB + CD = AD$.

В. Произволов



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

4. Человек Рассеянный с улицы Бассейной перемещается по клеткам квадрата 4×4. Находясь в клетке, он теряет в ней 1 рубль, после чего переходит в

2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2
4	2	2	4

соседнюю по стороне клетку. Там он снова теряет 1 рубль, после чего переходит в соседнюю клетку и т.д. Уборщица баба Клава сообщила (см. рисунок), сколько рублей она нашла в каждой клетке.

Мог ли Человек Рассеянный с улицы Бассейной передвигаться так, чтобы рисунок соответствовал его перемещениям?

Д. Калинин

5. Среди 8 подозреваемых имеется один фальшивомонетчик. Будучи опрошены по отдельности, каждый отрицает свою причастность к преступному промыслу. Все осведомлены о роде занятий друг друга, но стесняются называть имя преступника.

Инспектор Варнике может выделить любую группу из этих 8 человек и задать вопрос: «Имеется ли среди вас

фальшивомонетчик?» Если в группе нет фальшивомонетчика, то все отвечают «нет», в противном случае отвечают «да» («да» отвечает и сам фальшивомонетчик, пытаясь слиться с окружающими и не выдать себя).

За какое наименьшее количество вопросов инспектор может гарантированно определить преступника?

А. Жуков

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

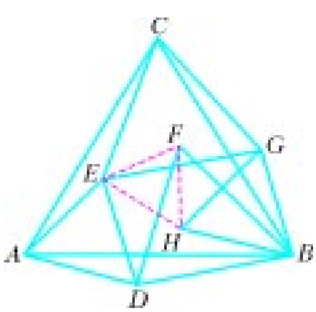
Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Из $n > 2$ монет составлен столбик. Разрешается изъять из него любые две соседние монеты, затем одну из них положить на самый верх столбика, а другую – в самый низ. Для каких n с помощью нескольких таких операций можно расположить монеты в обратном порядке?

И.Акулич

12. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образует арифметическую прогрессию. Докажите, что сумма $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$ кратна сумме $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

В.Сендеров



13. На рисунке треугольники ABC, ADE, BDF, CEG, BGH – равносторонние. Докажите, что ΔEFH также равносторонний.

Д.Калинин

14. Найдите какое-нибудь натуральное значение n, для которого выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4n+2} < \frac{1}{2005} < \frac{4}{5}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+4}{4n+5}.$$

П.Самовол, М.Аппельбаум

15. а) Назовем *полуладьей* такую ладью, которая обстреливает поля доски только в двух взаимно перпендикулярных направлениях из четырех возможных. Какое наибольшее число полуладей можно расставить на доске, чтобы никакая из них не угрожала никакой другой?

б) Тот же вопрос, если полуладья обстреливает поля доски не в двух перпендикулярных, а в двух противоположных направлениях.

в) Назовем *почти ладьей* такую ладью, которая обстреливает поля доски в трех взаимно перпендикулярных направлениях из четырех возможных. Какое наибольшее число почти ладей можно расставить на доске, чтобы никакая из них не угрожала никакой другой?

И.Акулич

К юбилею известной задачи

А.ЖУКОВ, Р.САРБАШ

Английский изобретатель головоломок Генри Э. Дьюдени ровно 100 лет назад, в 1905 году, в журнале «Daily Mail» опубликовал занимательную задачу, впоследствии ставшую знаменитой. Мы ее приводим в формулировке, в которой она появилась в 1907 году в книге «Кентерберийские головоломки»:

«Много попыток было предпринято, чтобы побудить Галантерейщика предложить компании какую-нибудь головоломку, но они долго оставались безуспешными. Наконец, на одной из стоянок Галантерейщик сказал, что покажет всем нечто, отчего «их мозги перекрутятся, как веревка от колокола». Кстати, он сыграл с компанией шутку, ибо сам не знал ответа на головоломку, которую предложил. Достав кусок материи в форме правильного треугольника, он сказал:

– Есть ли среди вас кто-нибудь, кому приходилось бы раскраивать материю? Побожусь, что нет. Каждый умеет что-то свое, и школяр может чему-нибудь поучиться у простолюдина, а мудрец у дурака. Покажите мне, если умеете, каким образом этот кусок материи можно разрезать на четыре части так, чтобы потом из них удалось составить правильный квадрат.

Некоторые из наиболее образованных паломников сумели сделать это с пятью частями, но не с четырьмя. Но когда они насели на Галантерейщика, требуя от него правильного ответа, он после долгих увиливаний признался, что не умеет решать эту задачу ни для какого числа частей.

— Клянусь святым Франциском, — сказал он, — каждый мошенник, думается мне, может придумать головоломку, но она хороша для тех, кто умеет ее решать.

После этих слов он едва унес ноги. Но самое странное — это то, что, как я выяснил, задачу действительно можно решить для случая четырех частей, не переворачивая части другой стороной вверх. Задачу решить непросто, но, я думаю, читатель найдет ее одной из самых интересных».

Решение этой задачи Генри Дьюдени продемонстрировал достопочтенным членам Лондонского Королевского общества в 1905 году. Изготовив модель из красного дерева и скрепив ее детали бронзовыми шарнирами, Дьюдени показал, как «легким движением руки» правильный треугольник превращается в равновеликий ему квадрат, и наоборот (рис.1).

Способ разрезания Дьюдени можно применить не только к равносторонним треугольникам, но и к некоторым треугольникам общего вида (рис.2). Какие же треугольники допускают разрезание по способу Дьюдени?

Процитируем отрывок из сборника «Избранные задачи», подготовленного по материалам американского журнала «American Mathematical Monthly» (размещение задачи Дьюдени в этом сборнике — свидетельство ее особого изящества):

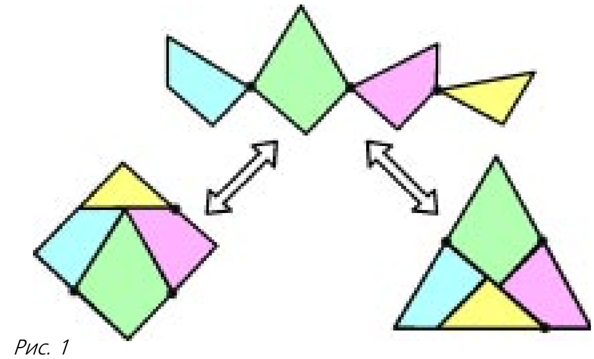


Рис. 1

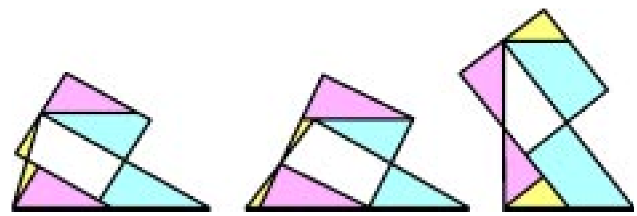


Рис. 2

«Предложенное им (*Дьюдени*) решение применимо не только к правильным треугольникам, но и к треугольникам более общего вида, удовлетворяющим одному дополнительному условию. Мы рассмотрим решение для более общего случая.

Пусть ABC (рис.3) — данный треугольник, D и E — середины сторон AB и BC. Построим отрезок R, равный стороне квадрата, равновеликого треугольнику ABC. Отрезок R можно построить при помощи циркуля и линейки, поскольку он равен среднему геометрическому отрезка AD и перпендикуляра, опущенно-

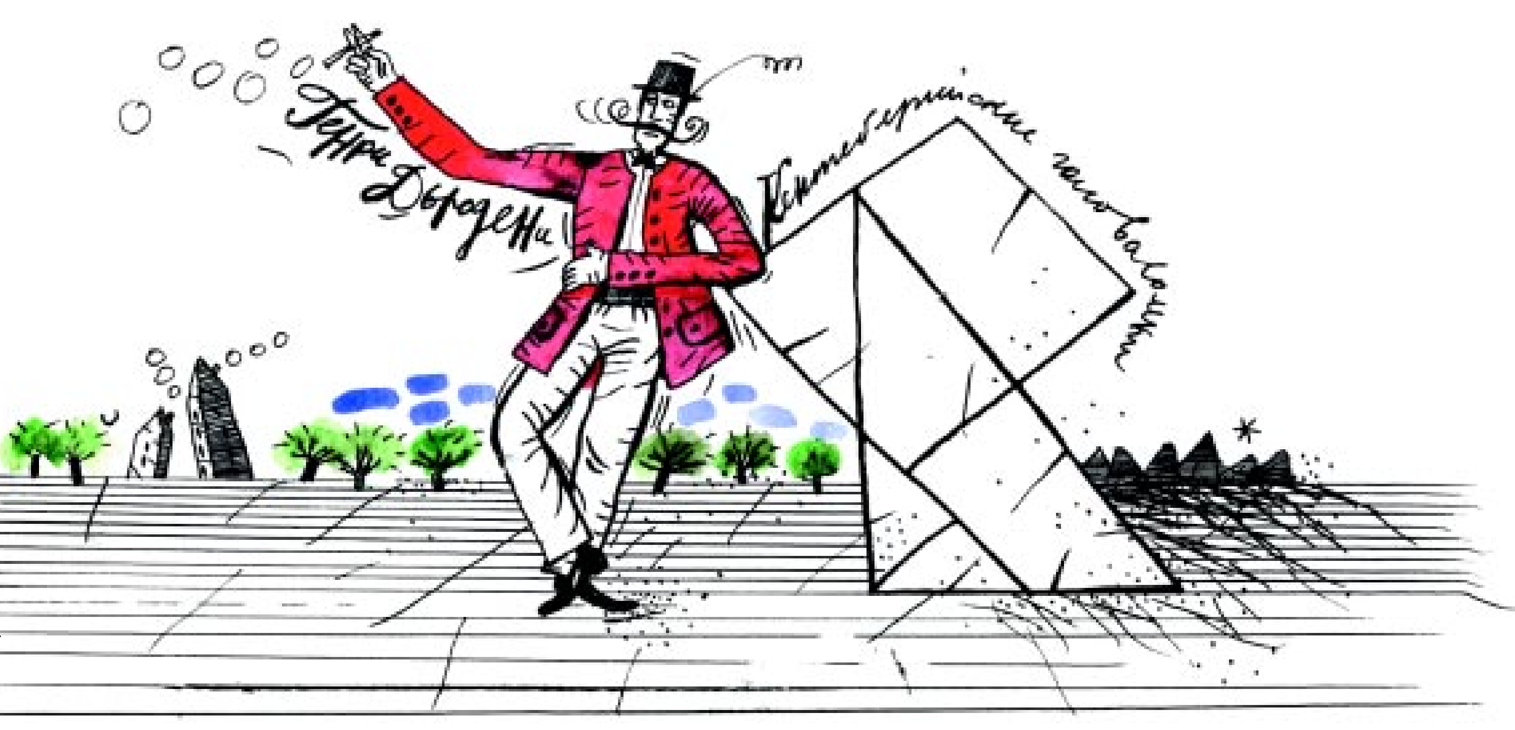


Иллюстрация Е.Силиной

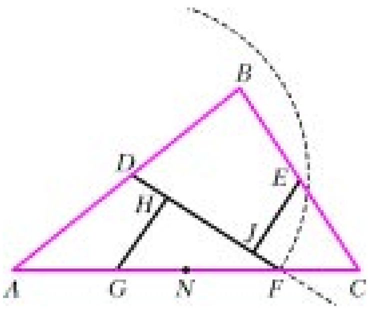


Рис. 3

го из вершины C на сторону AB. С центром в точке D и радиусом R опишем окружность, пересекающую сторону AC в точке F. Проведем прямую DF и построим на отрезке FA точку G так, чтобы $FG = CA/2$. Решение задачи возможно, если $FG \le FA$, или, иначе, если точка F принадлежит отрезку CN, где N – середина стороны CA. Из точек E и G опустим на FD перпендикуляры EJ и GH. После этого разрежем треугольник ABC на 4 части: четырехугольники $DBEJ$, $HGAD$, $CFJE$ и треугольник GHF».

Упражнение 1. Убедитесь в том, что задача Дьюдени допускает решение для равностороннего треугольника.

Упражнение 2. Докажите, что приведенный выше способ разрезания треугольника позволяет из четырех получившихся частей составить квадрат.

А теперь попробуйте применить изложенный способ разрезания к треугольнику со следующими данными: $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 11$, $\angle BAC = 45°$. Указанный критерий возможности разрезания такого треугольника выполняется, но... вряд ли ваша попытка увенчается успехом. Почему?

Оказывается, в обосновании приведенного нами решения задачи Дьюдени указаны не все требования. Давайте исследуем эту геометрическую задачу на возможность выполнения всех необходимых геометрических построений.

Пусть треугольник ABC допускает разрезание по способу Дьюдени (рис.4). Тогда четырехугольник $GDEF$ является параллелограммом. Действительно, DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому отрезки DE и GF равны и параллельны друг другу. Нам удобно будет дать этому параллелограмму имя. Условимся называть его *параллелограммом Дьюдени*.

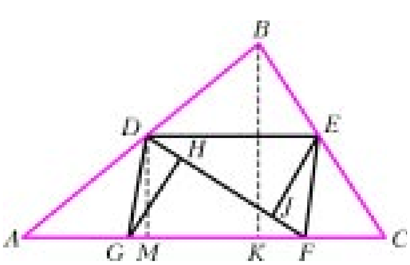


Рис. 4

Проведем $BK \perp AC$ и $DM \perp AC$. Обозначим $DE = GF = a$, $DM = h$. Тогда $AC = 2a$, $BK = 2h$, площадь треугольника ABC равна $2ah$ и $DF = \sqrt{2ah}$.

Первое условие возможности разрезания по способу Дьюдени: чтобы отрезок DF мог «дотянуться» до стороны AC, необходимо выполнение условия $DF \ge DM$. Отсюда $\sqrt{2ah} \ge h$, и

$$2a \ge h. \qquad (1)$$

Второе условие: точки H и J – основания перпендикуляров GH и EJ – должны находиться внутри отрезка FD (а не на его продолжении). Достаточно исследовать положение точки H (для точки J рассуждения аналогичны). Прямоугольные треугольники DMF и GHF подобны друг другу, поскольку имеют общий острый угол F. Отсюда

$$\frac{DF}{GF} = \frac{MF}{FH}, \text{ или } \frac{\sqrt{2ah}}{a} = \frac{\sqrt{2ah - h^2}}{FH}$$

(отрезок MF вычислен по теореме Пифагора из треугольника DMF). Значит,

$$FH = \frac{a\sqrt{2ah - h^2}}{\sqrt{2ah}} = \sqrt{\frac{2a^2 - ah}{2}}.$$

Накладываем ограничение $FH \le FD = \sqrt{2ah}$, откуда получаем

$$2a \le 5h. \qquad (2)$$

Третье условие возможности разрезания по способу Дьюдени было указано в процитированном выше отрывке:

$$FG \le FA \le 2a. \qquad (3)$$

Условия (1), (2), (3) не только необходимы для разрезания по способу Дьюдени, но и достаточны. Действительно, пусть величины a и h удовлетворяют ограничениям (1) и (2). Набор чисел a и h однозначно определяет параллелограмм Дьюдени. Катет $DM = h$ и гипотенуза $FD = \sqrt{2ah}$ однозначно определяют прямоугольный треугольник DMF, а отложив от точки F отрезок FG длины a, мы определим три вершины F, G, D параллелограмма $FGDE$, по которым он также восстанавливается однозначно. Теперь на прямой FG выберем точку A так, что $FG \le FA \le 2a$, и на расстоянии $2h$ от прямой FG проведем прямую l, параллельную GF (рис.5). Соединим точки A и D и, продлив прямую AD до пересечения с прямой l, получим точку B. Способ построения точки C показан на рисунке 5. Условия (1), (2), (3) гарантируют возможность разрезания треугольника ABC по способу Дьюдени.

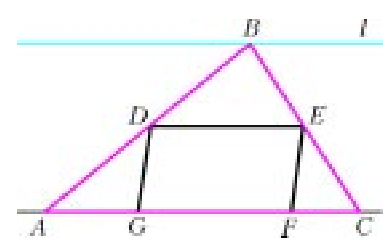


Рис. 5

Дьюдени по праву гордился своим результатом – именно тем, что ему удалось придумать способ разрезания треугольника и равновеликого ему квадрата на рекордно малое число составных частей.

Гидравлический удар

В.МАЙЕР

В 1952 ГОДУ СЕМИДЕСЯТИТРЕХЛЕТНИЙ АЛЬБЕРТ ЭЙНштейн в письме к своему другу юности Морису Соловину пояснил, как он понимает суть научного познания. Свои мысли он проиллюстрировал схемой, которая изображена на рисунке 1. Исходными являются непосредственные данные чувственного опыта. На их основе формулируется система аксиом или гипотез. Из нее выводятся умозаключения или следствия, которые проверяются экспериментом. Если следствия подтверждаются опытом, то гипотеза становится теорией, которая имеет определенную область применимости. Эйнштейн особое внимание обращал на то, что в научном познании логика работает в основном на этапе получения следствий из модели или теории. Переход от фактов к модели и от следствий к эксперименту относится, как он писал, к «внелогической (интуитивной) сфере».

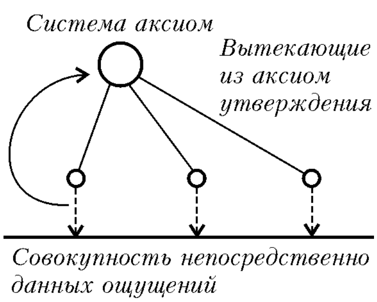


Рис. 1

Не надо думать, что цикл *факты* → *модель* → *следствия* → *эксперимент* относится исключительно к научному познанию. На самом деле, всякий успешно живущий в этом мире человек действует в соответствии с этим циклом. Чтобы далеко не ходить за примерами, напомним детективные романы, скажем Агаты Кристи, – вот где истинный учебник научного познания действительности! Они всегда начинаются с фактов. Второстепенные герои романов пытаются логически объяснить имеющиеся факты, но у них ничего хорошего не получается. Главные герои, вроде Эркюля Пуаро или мисс Марпл, ничем подобным не занимаются, но в какой-то момент интуитивно догадываются об истине. Они не спешат сообщить о своих догадках, пока не докажут их справедливость, зато охотно говорят о фактах, лежащих в их основе. Наконец, эти главные герои ставят следственный эксперимент, изобличающий преступника, т.е. подтверждающий следствия их умозрительной модели, и с этого момента справедливость интуитивной догадки оказывается доказанной.

В этой статье будет проиллюстрирован метод научного познания при решении реальной физической проблемы, а именно – известного явления разбивания бутылки с водой при кратковременном ударе по ее горлышку (см., например, статью Е.Ромишевскго «Удивительная бутылка» в «Кванте» №1 за 2001 год). Нам кажется, что для читателей «Кванта» нет необходимости слишком «разжевывать» материал, поэтому мы просто изложим его, выделив этапы исследования в соответствии с циклом научного познания.

Факты. В качестве оборудования для эксперимента приготовьте поллитровую стеклянную бутылку с плавно сужающейся горловой частью, специальный молоток, матерчатую перчатку и широкий сосуд. Практика показывает, что лучше всего использовать бутылку из-под пива из стекла коричневатого цвета. Молотком может служить деревянная киянка (столярный инструмент) размером $40 \times 100 \times 150$ мм, на одну из рабочих поверхностей которой наклеена плотная резиновая накладка толщиной 2–4 мм; длина ручки киянки 350 мм. Более эффектен опыт с молотком меньших размеров. Например, мы использовали цилиндрический молоток из второпласта диаметром 36 мм и длиной 80 мм с деревянной ручкой длиной 210 мм – он и изображен ниже на фотографиях. Матерчатая перчатка предназначена для предохранения руки, держащей бутылку, от осколков стекла. В действительности вероятность того, что расколется часть бутылки, находящаяся в руке, очень мала. Широкий сосуд нужен для сбора воды и осколков стекла. Подойдет бытовой тазик из полимера поперечником около 30 см и глубиной 10 см. Очень удобен также полиэтиленовый мешок, сложенный так, чтобы получился плоский сосуд высотой 20–30 см.

Опыт 1. На левую руку наденьте перчатку, возьмите бутылку за горлышко и расположите ее над тазиком на высоте около полуметра. В правую руку возьмите молоток и резко, но не слишком сильно ударьте по горлышку бутылки. При этом бутылка остается целой. Опыт повторите несколько раз, чтобы убедиться в том, что разбить таким способом бутылку невозможно.

Опыт 2. В бутылку налейте воду так, чтобы до отверстия бутылки оставалось примерно 70 мм, и вновь ударьте по горлышку молотком. Бутылка немедленно разбивается!

Фотография описанного опыта представлена на рисунке 2. Вы видите (см. рис.2,*а*), что дно бутылки оторвалось и из нее «вывалился» столб воды. Обратите внимание на полусферическую поверхность воды внутри бутылки – именно такую форму имеют поверхности жидкости в цилиндрическом смачиваемом сосуде в состоянии невесомости.

Понятно, что в опытах не всегда откалывается только дно бутылки – бутылка разламывается там, где находящаяся под водой стенка наименее прочна (см. рис.2,*б*). Однако никогда излом не происходит вблизи поверхности воды в верхней части бутылки.

Представленные здесь фотографии получены следующим образом. Синхроконтакт лампы-вспышки соединен с парой нормально разомкнутых контактов, которые установлены над сосудом для сбора воды и осколков стекла. Один из экспериментаторов держит бутылку над контактами на высоте, определяемой временем задержки от удара до момента

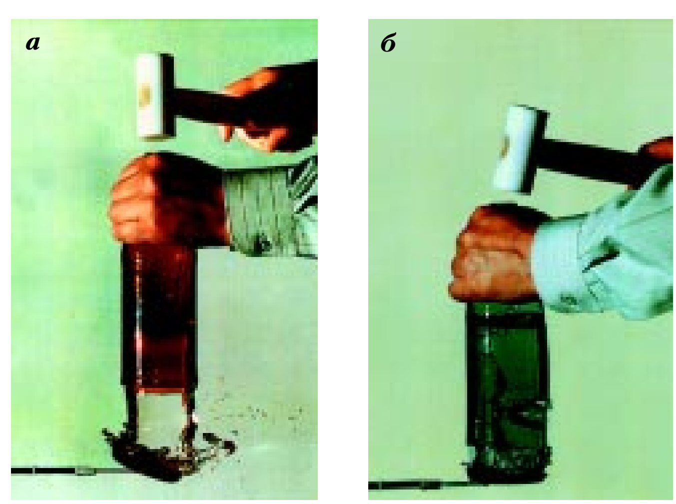


Рис. 2

фотографирования. Второй экспериментатор наводит фотоаппарат на резкость на бутылку, устанавливает выдержку «от руки», создает в помещении полумрак и открывает затвор фотоаппарата. Первый экспериментатор производит по бутылке удар, оторвавшееся дно замыкает синхроконтакты, происходит вспышка света, и второй экспериментатор отпускает затвор. Пленка экспонирована, можно отдавать на проявление и печать фотоснимков.

Модель. Попробуем объяснить обнаруженное явление. На рисунке 3 схематически изображены бутылка в виде цилиндра и молоток в форме свободно падающего на бутылку тела.

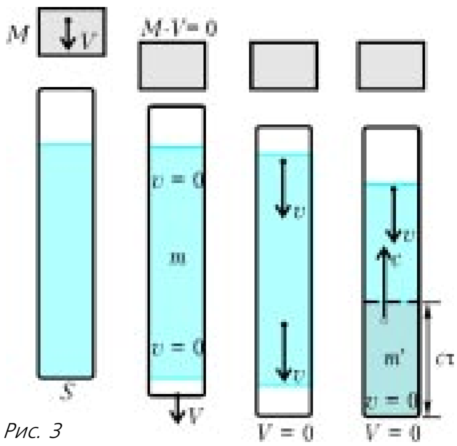


Рис. 3

В момент удара по горлышку импульс приобретает бутылка, а вода в ней на мгновение остается неподвижной. Затем бутылка прекращает движение, и атмосферное давление гонит воду в бутылке вниз. При ударе воды о дно за небольшое время τ останавливается столб воды массой

$$m' = \rho S c \tau ,$$

где ρ – плотность воды, S – площадь дна бутылки, c – скорость распространения сжатия (т.е. скорость упругой волны или скорость звука) в воде. Если скорость столба воды в момент удара о дно составляла v, то дно получило импульс

$$m'v = f\tau = pS\tau ,$$

где f – сила давления, p – давление на дно бутылки.

По закону Паскаля p – это давление во всем остановившемся объеме воды, которое действует не только на дно, но и на стенки бутылки в области сжатия воды. Сравнивая две предыдущие формулы, получаем, что давление в бутылке возрастает на величину

$$p = \rho c v .$$

Так как скорость звука в воде довольно велика ($c = 1500$ м/с), то даже при сравнительно небольших скоростях движения воды давление в ней при внезапном торможении резко повышается, стекло не выдерживает и разрушается. Такое явление получило название *гидродинамического* или *гидравлического удара.*

Следствия. Для простоты будем считать массы молотка и бутылки одинаковыми и равными M, а взаимодействие их при ударе – упругим. Тогда по закону сохранения импульса после удара молотка по горлышку бутылки молоток останавливается, а бутылка приобретает скорость V, равную скорости молотка в момент удара (см. рис.3). Кинетическая энергия бутылки расходуется на создание и увеличение полости насыщенного пара вблизи ее дна, т.е. на работу против сил атмосферного давления. Когда бутылка останавливается, то же самое атмосферное давление гонит столб воды к дну бутылки, а насыщенный пар конденсируется. При этом по закону сохранения энергии $MV^2/2 = mv^2/2$ столб воды приобретает скорость $v = \sqrt{M/m}\,V$. Подставляя это значение в формулу для давления, получаем

$$p = \rho c \sqrt{\frac{M}{m}}\, V .$$

Для оценки скорости молотка при ударе допустим, что он свободно падает с высоты $h \approx 0,5$ м, тогда $V = \sqrt{2gh} \approx 3$ м/с. Получаем, что при гидравлическом ударе давление в бутылке возрастает на

$$p = 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с} \cdot 3 \text{ м/с} = 45 \cdot 10^5 \text{ Па} .$$

Иными словами, кратковременно давление в бутылке в 45 раз превосходит атмосферное! Конечно же, бутылочное стекло столь значительного роста давления выдержать не в состоянии.

Чтобы бутылка при таких чудовищных условиях не разрушилась, нужно как-то предотвратить внезапный рост давления в воде. Разумно предположить, что если в воду поместить легко сжимаемый предмет, то возникающая при гидродинамическом ударе волна сжатия сомнет этот предмет, давление в воде возрастет незначительно и стекло не разрушится.

Эксперимент. Чтобы экспериментально обосновать построенную модель явления, проверим ее следствия. Вначале подтвердим, что при ударе молотка по горлышку столб воды в самом деле отрывается от дна бутылки.

Опыт 3. Наполнив бутылку водой, как в опыте 2, несколько раз несильно ударьте по ее горлышку молотком, постепенно увеличивая силу удара. При этом вначале слышен лишь глухой звук удара, а затем появляется резкий звонкий звук, как будто по стеклу после глухого удара молотком ударяет металл. Повторите опыт с пустой бутылкой и убедитесь, что ничего подобного не происходит. Следовательно, звонкий звук производит столб воды в бутылке, ударяясь о ее дно. Но чтобы это произошло, вначале вода должна оторваться от дна бутылки.

Теперь покажем, что бутылка с водой разрушается, если скорость молотка, масса которого примерно равна массе бутылки, в момент удара действительно составляет приблизительно 3 м/с. Для этого можно непосредственно измерить скорость молотка при ударе, а можно решить проблему и проще.

Опыт 4. Попробуйте, слегка держась за конец рукоятки, без усилий направлять свободно падающий молоток на горлышко пустой бутылки. После небольшой тренировки у вас получится то, что нужно. Затем возьмите бутылку с водой и начните «бросать» на ее горлышко молоток, постепенно увеличивая высоту бросания. Вы обнаружите, что бутылка разбивается, когда на ее горлышко молоток падает с высоты около полуметра.

Теперь подготовьте оборудование к новому опыту. Возьмите резиновый напальчник диаметром 20 мм и длиной 70 мм, гвоздь диаметром 4 мм и длиной 60 мм, несколько металлических гаек с диаметром отверстия 5–6 мм, поролон и прочную нить. Из напальчника сделайте герметичный резиновый мешок с воздухом, тонущий в воде. Для этого оберните гвоздь поролоном, закрепите слой поролона нитью, введите гвоздь с поролоном внутрь напальчника и слегка перевяжите его отверстие. Погрузите мешочек в стакан с водой и, если он плавает, добавьте в него металлические гайки так, чтобы он начал тонуть. Герметично перевяжите отверстие напальчника нитью. Прибор сделан правильно, если мешочек наполнен воздухом и при смачивании водой свободно проходит в горлышко бутылки (именно для этого нужен гвоздь, иначе проталкивание мешочка потребует определенного времени).

Опыт 5. Приготовьте бутылку с водой, как в опыте 2, и погрузите в нее резиновый мешочек с воздухом так, чтобы он висел на нити вблизи дна бутылки, но не касался его. Ударьте по горлышку молотком – бутылка останется целой!

Объяснить это явление можно тем, что при гидравлическом ударе воздух в резиновом мешочке сжимается, поэтому давление в воде повышается не настолько, чтобы разрушить стекло.

Опыт 6. Повторите предыдущий опыт несколько раз, располагая мешочек с воздухом на разной высоте в воде, затем за нить удалите мешочек из бутылки и вновь произведите удар – бутылка немедленно расколется на части!

Итак, серия опытов со всей убедительностью на качественном уровне подтверждает следствия теоретической модели, следовательно, физическая сущность явления действительно заключается в гидродинамическом ударе воды внутри бутылки. Значит ли это, что мы полностью исчерпали проблему? Разумеется нет, и вы сами сможете сообразить, как продолжить исследование.

---

5 августа 2005 года скончался Анатолий Иванович Ларкин, один из самых самобытных и выдающихся физиков-теоретиков настоящего времени. Он не занимал высоких постов, не редактировал журналы, редко выступал на конференциях. Его сильнейшее влияние на мировое сообщество физиков почти целиком определяется написанными им статьями, в которых освещались «темные углы» и определялись многие новые направления развития науки.

Анатолий Иванович Ларкин родился 14 октября 1932 года в Коломне. Научная биография академика РАН, заведующего сектором Института теоретической физики им. Л.Д.Ландау, профессора Московского государственного университета, профессора физики и члена Института теоретической физики университета Миннесоты (США), лауреата престижных международных премий – Хьюлетт-Паккард, Ф.Лондона, Л.Онсагера, Дж.Бардина – начиналась в Москве более полувека назад. Поступив в Московский инженерно-физический институт, он учился физике у таких блестящих учителей, как И.Е.Тамм, М.А.Леонтович, И.Я.Померанчук, А.Б.Мигдал. Свою первую научную работу он выполнил под руководством А.Д.Сахарова.

Научное творчество А.И.Ларкина составляет богатейшую картину современной физики конденсированного состояния. Начав с проблем ядерной физики и теории частиц, он постепенно переходит к теории магнитных и неупорядоченных систем, вплотную подходит к решению загадки фазовых переходов второго рода. Монументален его вклад в физику сверхпроводников, в его работах сформулированы основы современной теории одномерных электронных систем. В конце XX века происходит существенный прогресс в понимании физики неупорядоченных проводников, А.И.Ларкин и здесь становится общепризнанным лидером, закладывает основы таких новых направлений, как слабая локализация, мезоскопика и квантовый хаос.

Каждому, кому посчастливилось работать с Анатолием Ивановичем, известно возникавшее при этом чувство восторга овладения новым знанием. До последних дней он оставался желанным соавтором для большого числа коллег – как именитых, так и молодых. А.И.Ларкин обладал редкой физической интуицией. Его не часто можно было увидеть пишущим формулы – задачи решались в уме. Он блестяще знал и использовал самые современные методы теоретической физики и математики, но на его письменном столе не было стоп исписанной бумаги. О том, чем он сейчас занят, говорила лишь испещренная отрывками обсуждаемых с разными соавторами задач доска в его кабинете.

Анатолий Иванович был удивительно доброжелательным человеком. Всем было хорошо известно, что у него нет барьера в отношении задающего вопрос и он готов обсуждать научную проблему одинаково подробно и с академиком, и с аспирантом. А на семинарах он чаще молчал, выступая только тогда, когда хотел защитить, обычно молодого, докладчика, на которого уж очень активно «нападала» аудитория.

Анатолий Иванович Ларкин
(1932 – 2005)

Научные достижения А.И.Ларкина неразрывно связаны в его жизни с воспитанием молодых физиков-теоретиков, его талант Учителя привел в теоретическую физику многих способных людей. Однажды на вопрос о том, по какому принципу он отбирает учеников и чем руководствуется при выборе задачи для первой научной работы студента, Анатолий Иванович ответил: «Студенты приходят ко мне сами. Я беру их не очень часто, так чтобы на всех хватало времени... Первую же научную проблему я подбираю под ученика, когда пойму, к чему он склонен. Если ему нравится размышлять, то и задачку я подбираю такую, где нужно придумать что-то новое. Если же он больше склонен к сложным вычислениям, то я подбираю задачу, соответствующую его математическим способностям. А затем начинается совместный путь познания».

Человечность, доброта, обаяние Анатолия Ивановича и радость участия в совместном творчестве притягивали к нему людей с разными характерами и талантами. А.И.Ларкин оставил своим ученикам и сотрудникам завершать десяток уже начатых, благодаря его идеям, исследований. Поэтому еще долго будут появляться работы, подписанные его именем.

А.А.Варламов, С.С.Кротов,
Ю.А.Осипьян, Д.Е.Хмельницкий

Центрированные оптические системы

В.МОЖАЕВ

В этой статье будут рассмотрены преломляющие системы, которые состоят из плоских или сферических поверхностей раздела сред с разными показателями преломления. Система сферических поверхностей является центрированной, если центры всех преломляющих поверхностей лежат на одной прямой, которая называется главной оптической осью системы. Большинство реальных преломляющих систем содержат, по крайней мере, две преломляющие поверхности. Обычная тонкая линза – типичный пример оптической системы, но это частный случай. Мы привыкли рассматривать линзу не как оптическую систему, а как самостоятельный преломляющий элемент. Ниже будут рассмотрены примеры оптических систем, состоящих из набора преломляющих и отражающих элементов (тонкие линзы, плоские зеркала).

Перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. *Простейшая оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F и плоского зеркала, расположенного за линзой перпендикулярно ее главной оптической оси (рис.1). Найдите такое расстояние от линзы до зеркала, при котором увеличение системы не зависит от положения предмета перед линзой. Чему равно это увеличение? Изображение предмета получается после прохода лучей линзы, зеркала и снова линзы.*

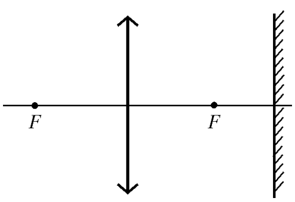


Рис. 1

Обозначим произвольное расстояние от предмета AB до линзы через d, а расстояние от линзы до зеркала – через L (рис.2). Первое промежуточное изображение $A'B'$ будет находиться на расстоянии f от линзы. Величину f можно найти по формуле линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \text{ откуда } f=\frac{dF}{d-F}.$$

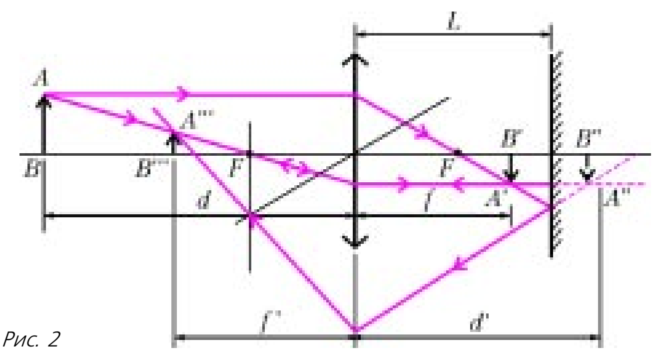


Рис. 2

Увеличение линзы равно

$$\Gamma_1=\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}.$$

После отражения от плоского зеркала изображение $A''B''$ будет находиться на расстоянии $2L-f$ от линзы. Обозначим это расстояние через d':

$$d'=2L-f=\frac{d(2L-F)-2LF}{d-F}.$$

Увеличение в данном случае равно

$$\Gamma_2=1.$$

Рассмотрим теперь второй проход лучей через линзу. Расстояние от предмета $A''B''$ до линзы равно d', а расстояние от изображения $A'''B'''$ обозначим через f'. По формуле линзы найдем f':

$$\frac{1}{d'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}, \text{ откуда } f'=\frac{d'F}{d'-F}=\frac{\left(d(2L-F)-2LF\right)F}{2d(L-F)+F(F-2L)}.$$

Увеличение линзы для этого случая равно

$$\Gamma_3=\frac{f'}{d'}=\frac{(d-F)F}{2d(L-F)+F(F-2L)}.$$

Общее увеличение нашей системы составляет

$$\Gamma=\Gamma_1\cdot\Gamma_2\cdot\Gamma_3=\frac{F^2}{2d(L-F)+F(F-2L)}.$$

Если мы хотим, чтобы увеличение не зависело от расстояния d, должно выполняться условие

$$L-F=0.$$

Отсюда следует, что увеличение будет постоянным при

$$L=F.$$

А само увеличение в таком случае будет равно

$$\Gamma=-1.$$

Знак «минус» означает, что изображение будет перевернутым. (Сделайте соответствующей рисунок и убедитесь в этом.)

Задача 2. *Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F и уголкового отражателя (два плоских зеркала, образующих прямой двугранный угол) (рис.3). Отражатель расположен симметрично относительно главной оптической оси линзы на*

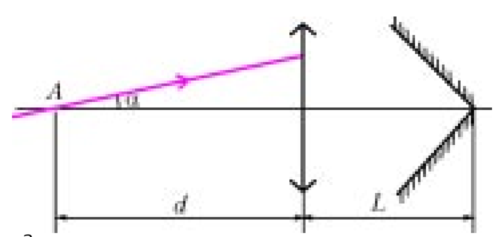


Рис. 3

расстоянии $L=2F$ от нее. На вход данной системы падает узкий пучок света под малым углом α, который пересекает ось системы в точке A на расстоянии $d=3F$ от линзы. Постройте выходящий из системы пучок света и определите угол отклонения этого пучка от оси системы.

Прежде чем решать эту задачу, необходимо разобраться в некоторых оптических свойствах уголкового отражателя.

Пусть точечный источник света S расположен перед уголком на его оси симметрии (рис.4). Найдем изображение источника в уголке, построив ход нескольких лучей света. На рисунке 4 хорошо видно, что изображение источника S в

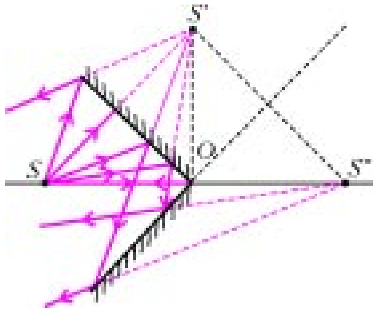


Рис. 4

верхнем плоском зеркале – точка S' – мнимое и расположено симметрично за зеркалом. Изображение источника S' в нижнем зеркале – точка S'' – находится на оси симметрии уголка, а отрезки OS, OS' и OS'' равны. Следовательно, для точечного источника, расположенного на оси симметрии уголка, уголок ведет себя как плоское зеркало, расположенное в вершине O уголка и перпендикулярное оси симметрии уголка. Для произвольного расположения источника уголок будет осуществлять два зеркальных преобразования: относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через вершину уголка, и относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и ребро уголка. Второе свойство уголка продемонстрировано на рисунке 5. Если на уголок падает узкий пучок света, распространяющийся параллельно оси симметрии уголка, то очевидно, что выходящий пучок (после отражений от обоих зеркал) будет параллелен входящему. Этим свойством обладает и любой другой произвольно падающий пучок (см. рис.5), т.е. всегда выходящий из уголка пучок параллелен входящему.

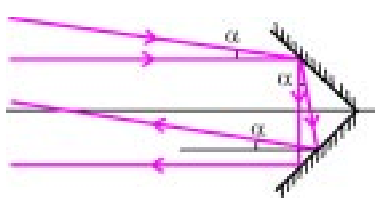


Рис. 5

Теперь можно перейти к решению задачи. Точку A, в которой входящий пучок пересекает главную оптическую ось линзы, мы можем считать источником, а точку A' пересечения преломленного пучка в линзе с этой же осью будем считать его изображением в линзе (рис.6). Найдем расстояние f этого изображения от линзы по формуле линзы:

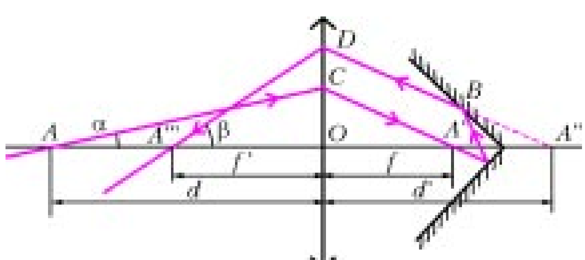


Рис. 6

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \text{ откуда } f=\frac{dF}{d-F}=\frac{3}{2}F .$$

Изображение точки A' в уголковом отражателе – точка A'' – будет находиться от линзы на расстоянии

$$d'=2L-f=\frac{5}{2}F .$$

Поскольку отраженный от уголка пучок своим продолжением исходит из мнимого источника A'', то, проведя прямую, параллельную CA' и проходящую через точку A'', мы получим отраженный от уголка луч BD. Рассматривая точку A'' в качестве источника, найдем по формуле линзы точку A''', сопряженную A'':

$$\frac{1}{d'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}, \text{ откуда } f'=\frac{d'F}{d'-F}=\frac{5}{3}F .$$

Соединив точки D и A''', мы получим выходящий из системы пучок.

Теперь мы можем найти угол β между выходящим пучком света и главной оптической осью нашей системы. Из треугольника AOC найдем сторону OC:

$$OC=d\,\mathrm{tg}\,\alpha\approx d\alpha .$$

Из подобия треугольников ODA'' и OCA' выразим отношение сторон:

$$\frac{OD}{OC}=\frac{d'}{f} .$$

Отсюда

$$OD=OC\frac{d'}{f}\approx 5F\alpha .$$

Из треугольника $A'''DO$ следует, что

$$\beta\approx \mathrm{tg}\,\beta=\frac{OD}{f'}\approx 3\alpha .$$

Задача 3. *На центрированную систему тонких линз, изображенную на рисунке 7, падает слева параллельный пучок света под малым углом α к оптической оси линз. Фокусные расстояния линз равны $F_1=60$ см, $F_2=4$ см. При каком расстоянии L между линзами выходной пучок будет параллельным? Чему будет равен угол отклонения выходного пучка от оптической оси линз?*

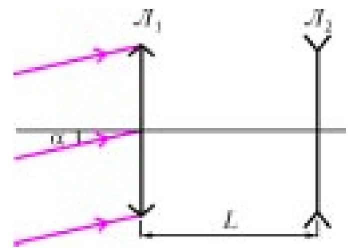


Рис. 7

После прохождения собирающей линзы $Л_1$ параллельный пучок света собирается в ее задней фокальной плоскости – точка A на рисунке 8. Положение этой точки определяется

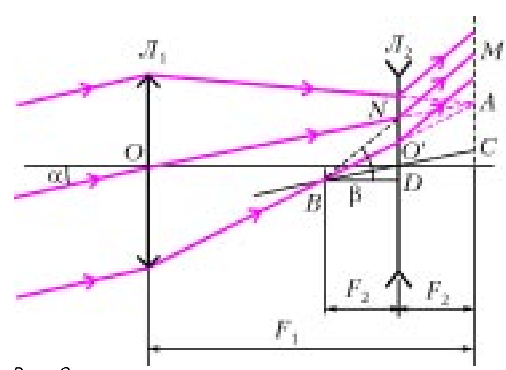


Рис. 8

лучом OA, проходящим через оптический центр линзы. Мы знаем, что параллельный пучок на выходе рассеивающей линзы имеет место только в том случае, если на линзу падает сходящийся пучок, причем точка схождения лежит в задней фокальной плоскости линзы. Поэтому в нашем случае расстояние между линзами равно

$$L=F_1-F_2=56 \text{ см} .$$

Для определения угла отклонения выходного пучка от оптической оси нашей системы проведем вспомогательную линию BC, проходящую через оптический центр линзы $Л_2$ и параллельную лучу ON (точка N – пересечение луча OA с линзой $Л_2$). После прохождения линзы луч ON преломится и выйдет в виде луча NM, продолжение которого в

(Продолжение см. на с. 34)

В каждой строчке — только точки...

Точка – простейший геометрический объект (со слов Евклида – то, что не имеет частей). Однако если в какой-либо геометрической модели простейших объектов собирается несколько, то разобраться с ними не всегда бывает просто. Здесь мы будем рассматривать конечные множества точек плоскости, не оговаривая это каждый раз особо.

В большинстве задач анализу подвергаются точки так называемого *общего положения* – такого множества точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Немного поиграв с этим определением, можно придумать множества с другими интересными свойствами. Например:

1) множество точек, для каждой из которых найдется прямая, содержащая две другие точки этого множества;

2) множество точек, для каждых двух точек которого на соединяющей их прямой найдется третья точка данного множества.

При кажущемся сходстве эти определения задают совокупности точек с разными свойствами. Если в первом случае точки могут довольно причудливым образом располагаться на плоскости (как на рисунке 1), то во втором их «свобода действий» резко ограничивается – все они обязаны лежать на одной прямой. На последний факт обратил внимание английский математик Джеймс Сильвестр, сформулировав его в 1893 году в виде задачи. Любопытно, что сам Сильвестр не смог предложить удовлетворительного решения придуманной им задачи (одно из известных решений приведено в конце журнала).

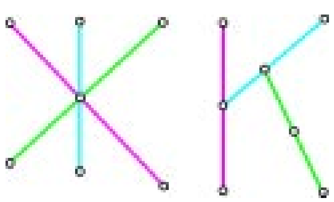


Рис. 1

Вот еще несколько любопытных фактов из геометрии точечных совокупностей.

- На плоскости можно найти сколь угодно много точек, не принадлежащих одной прямой, расстояния между любыми двумя из которых будут выражаться целыми числами. Попытка построить бесконечное множество точек с таким же свойством неизбежно сужает «жизненное пространство» – в этом случае множество точек может располагаться исключительно лишь на одной прямой (автор – П.Эрдёш).
- Если каждой окружности, проходящей через 3 точки из некоторого конечного множества точек, принадлежит по крайней мере еще одна точка этого множества, то все точки этого множества принадлежат одной окружности.
- Если из любой четверки точек некоторого конечного множества точек можно выбросить одну точку так, что оставшиеся точки будут принадлежать одной прямой, то из данного множества точек можно выбросить одну точку так, что оставшиеся точки будут принадлежать одной прямой (В.Прасолов).
- Если не все из n точек лежат на одной прямой, то среди прямых, соединяющих попарно точки данного множества, найдется по крайней мере n различных (П. Эрдёш).

Геометрия совокупности точек воплотилась еще в одной классической задаче, предложенной Сильвестром в 1860 году: для заданного конечного набора точек $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ нужно найти наименьшую охватывающую их окружность. Оказывается, что наименьшая охватывающая окружность единственна, и, кроме того, она либо является описанной окружностью для некоторой тройки точек множества S, либо некоторая пара точек S служит диаметром этой окружности. Найти наименьшую охватывающую окружность можно, просто перебрав все пары и тройки точек множества S (с этой незатейливой, но трудоемкой процедурой легко справляется компьютер). Однако существуют более эффективные алгоритмы. Один из таких «быстрых» алгоритмов предложен М.Шеймосом (вторая половина двадцатого столетия) и основан на использовании так называемой *диаграммы Вороного*.

Русский математик Г.Ф.Вороной пришел к идее такой диаграммы, изучая области близости конечного набора точек S. Множество всех точек плоскости, более близких к точке P_i, чем к точке P_j ($i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$), есть полуплоскость, определяемая прямой, перпендикулярной отрезку P_iP_j и делящей его пополам, и содержащая точку P_i. Множество всех точек плоскости, более близких к P_i, чем к любой другой из $n - 1$ заданных точек, получается в результате пересечения $n - 1$ таких полуплоскостей. На рисунке 2 показана такая область близости (*многоугольник Вороного*) для точки P_i, со всех сторон окруженной соседями. На рисунке 3 n таких областей, построенных для каждой из n точек заданного множества S, образуют сеть, которую называют диаграммой Вороного.

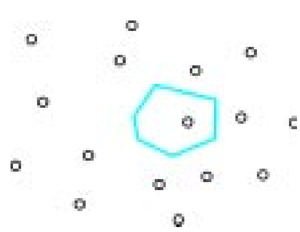


Рис. 2

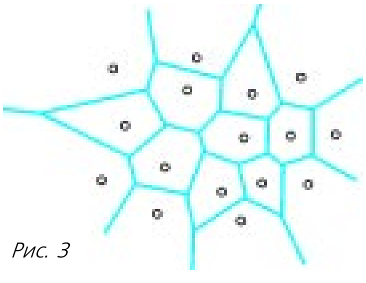


Рис. 3

Эта диаграмма обладает многими замечательными свойствами.

• Центр наименьшей охватывающей окружности лежит либо в какой-то из вершин диаграммы Вороного, либо на отрезке, соединяющем две наиболее удаленные друг от друга точки набора S.

• Если никакие четыре точки исходного множества S не лежат на одной окружности, то каждая вершина диаграммы Вороного является точкой пересечения ровно трех ребер, а также центром окружности, проходящей через некоторые три точки исходного множества.

• Хотя каждая точка исходного множества S может иметь в качестве ближайших соседей любую другую точку этого множества, сама она может быть ближайшей соседкой не более чем 6 точкам. Действительно, предположим, что это не так: пусть точка A является ближайшей соседкой точкам $P_1, P_2, \ldots, P_7$ (рис. 4). Тогда среди точек $P_1, P_2, \ldots, P_7$ найдутся две, скажем P_6 и P_7, для которых $\angle P_6AP_7 < 60°$ (иначе сумма 7 углов $\angle P_1AP_2$, $\angle P_2AP_3$, …, $\angle P_7AP_1$ была бы больше $360°$). Но тогда в треугольнике P_6AP_7 найдется угол, больший $60°$ (иначе сумма внутренних углов треугольника P_6AP_7 была бы меньше $180°$). Пусть, например, этим бóльшим углом будет $\angle P_6P_7A$, тогда $AP_6 > P_6P_7$ (как стороны, противолежащие соответствующим по величине углам). Значит, у точки P_7 ближайшая соседка не A, а точка P_6 – противоречие. Шести же точкам точка A может быть ближайшей соседкой, если, например, точки $P_1, P_2, \ldots, P_6$ располагаются в вершинах правильного шестиугольника с центром в точке A.

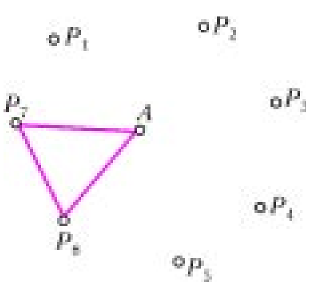


Рис. 4

• Если n точек располагаются так, что попарные расстояния между ними различны, то каждая точка может быть ближайшей соседкой самое большее пяти точкам данного множества.

• Как бы ни располагалось конечное множество точек на плоскости, среди них обязательно найдется точка, у которой не более трех ближайших (А.Карабегов, задача М388). Для обоснования этого факта к ранее применявшимся соображениям добавляется «принцип крайнего». Предположим, что у каждой точки на ближайшем удалении от нее найдутся 4 точки. Пусть r – *наименьшее* расстояние между точками. Рассмотрим множество всех точек, расстояние от которых до ближайших к ним равно r, и пусть A – одна из *крайних* точек этого множества, причем такая, что 4 ее ближайшие точки-соседки располагаются внутри угла, меньшего $180°$ (рис.5). Поскольку расстояние r наименьшее, то каждый из отрезков AP_i не больше любого из отрезков P_iP_j ($i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$), поэтому каждый из углов P_iAP_j не меньше $60°$, а этого не может быть. Множество точек плоскости, у каждой из которых имеется ровно 3 ближайших, показано на рисунке 6.

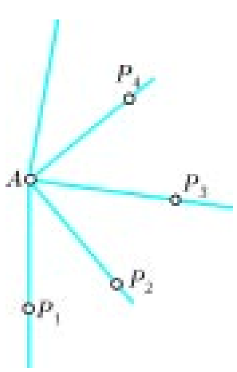


Рис. 5

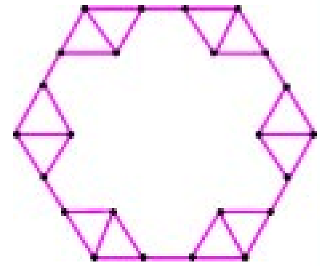


Рис. 6

• Если конечное множество точек S не принадлежит одной прямой, то можно указать такие 3 точки этого множества, что проходящая через них окружность не будет содержать внутри себя других точек S (Ф.Вайнштейн, М765).

• Предположим, что внутри синего контура, показанного на рисунке 7, располагается множество из 10^{100} точек. Кажется невероятным, что при таком «плотном» расположении найдется прямая, не проходящая ни через одну точку множества и разделяющая его на две части с одинаковым количеством точек. Для доказательства через каждую пару точек данного множества проведем прямую. Хотя таких прямых будет очень много, но все же – конечное количество. Рассмотрим точку M, не принадлежащую ни одной из проведенных прямых и лежащую в стороне от контура. Проведем через нее вспомогательную прямую l, не параллельную ни одной из проведенных ранее прямых. Далее начнем поворачивать прямую l на достаточно малый угол вокруг точки M в одном направлении так, чтобы она отделяла по одной точки, расположенные внутри контура. Поскольку прямая может пройти не более чем через одну точку множества, то это возможно. Отсчитав $10^{100} : 2$ точек, найдем положение прямой, удовлетворяющее условию задачи. Вместо поворота прямую l можно также перемещать параллельно самой себе при условии, что изначально она не параллельна ни одной из прямых, проведенных через каждую пару точек внутри контура.

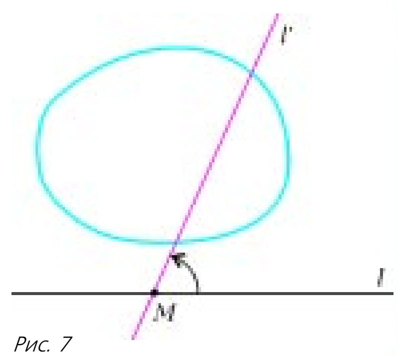


Рис. 7

• Любое множество из $n \geq 3$ точек плоскости можно разбить на две группы так, что эти группы точек нельзя отделить одну от другой никакой прямой (П.Кирхбергер). Однако если эти точки общего положения, то $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ прямыми их можно разделить так, что для любых двух из этих точек найдется прямая, от которой они лежат по разные стороны (Н. Васильев, А.Егоров, М498).

А.Жуков

(Начало см. на с. 30)

обратную сторону пересекается с линией BC в передней фокальной плоскости линзы $Л_2$ (точка B). Проведем еще одну вспомогательную прямую – BD, параллельную оптической оси. Из треугольника ONO' найдем длину отрезка NO':

$$NO' = (F_1 - F_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx (F_1 - F_2)\alpha\,.$$

Из треугольника $BO'D$ определим длину отрезка $O'D$:

$$O'D = F_2\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx F_2\alpha\,.$$

Длина отрезка ND равна сумме длин отрезков NO' и $O'D$:

$$ND = NO' + O'D \approx F_1\alpha\,.$$

Теперь из треугольника BND найдем угол β отклонения выходного пучка:

$$\beta \approx \frac{ND}{BD} \approx \frac{F_1}{F_2}\alpha\,.$$

Рассмотренная выше система линз является оптической схемой зрительной трубы Галилея. Угловое увеличение такой трубы, настроенной на наблюдение удаленных объектов, равно

$$\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{F_1}{F_2}\,.$$

Задача 4. *Микроскоп имеет объектив $Л_1$ с фокусным расстоянием $F_1 = 1$ см и окуляр $Л_2$ с фокусным расстоянием $F_2 = 3$ см, расстояние между ними $L = 20$ см (рис.9). На каком расстоянии от объектива должен находиться предмет, чтобы окончательное изображение получилось на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см от глаза (глаз расположен вплотную к окуляру)? Какое при этом получится линейное увеличение предмета?*

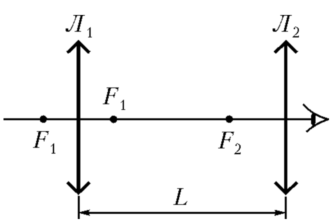


Рис. 9

При наблюдении в микроскоп предмет A располагается перед объективом на расстоянии $d_1 > F_1$ (рис.10). После

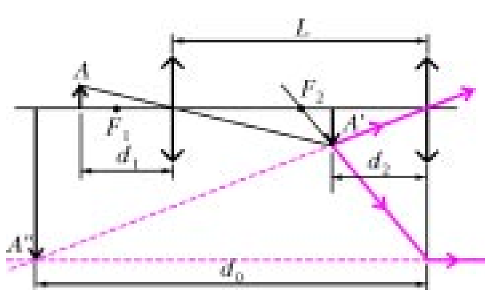


Рис. 10

объектива получается увеличенное перевернутое изображение предмета A', которое расположено от окуляра на расстоянии, меньшем его фокусного расстояния. Окуляр является обычной лупой, и изображение в нем мнимое увеличенное и прямое.

Решение задачи будем вести с конца. Мы знаем, что окончательное изображение предмета A'' должно получиться перед окуляром на расстоянии d_0. Поэтому, используя формулу линзы, мы можем найти положение промежуточного изображения A' перед окуляром – на рисунке 10 это расстояние обозначено через d_2:

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{F_2}\,,\ \text{ откуда }\ d_2 = \frac{d_0F_2}{d_0 + F_2}\,.$$

Найденное положение предмета A' для линзы $Л_2$ является изображением предмета A в линзе $Л_1$. Опять используем формулу линзы (для линзы $Л_1$), имея в виду, что искомое расстояние от предмета A до линзы равно d_1, а расстояние от линзы до изображения A' равно $L - d_2$:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{L - d_2} = \frac{1}{F_1}\,.$$

Отсюда получаем искомое расстояние:

$$d_1 = \frac{(L - d_2)F_1}{L - d_2 - F_1} = \frac{\left(Ld_0 + F_2(L - d_0)\right)F_1}{Ld_0 + F_2(L - d_0) - F_1(d_0 + F_2)} = 1{,}06 \text{ см}\,.$$

Линейное увеличение микроскопа, очевидно, равно произведению увеличений каждой из линз:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2\,.$$

Увеличение объектива равно

$$\Gamma_1 = \frac{L - d_2}{d_1} = \frac{Ld_0 + F_2(L - d_0) - F_1(d_0 + F_2)}{F_1(d_0 + F_2)}\,.$$

Увеличение окуляра равно

$$\Gamma_2 = \frac{d_0}{d_2} = \frac{d_0 + F_2}{F_2}\,.$$

Общее увеличение микроскопа равно

$$\Gamma = \frac{Ld_0 + F_2(L - d_0) - F_1(d_0 + F_2)}{F_1F_2} \approx 152\,.$$

Задача 5. *Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Кеплера. В качестве объектива и окуляра трубы используются две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 30$ см и $F_2 = 5$ см. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром трубы находится в пределах от $L_1 = 33$ см до $L_2 = 34{,}5$ см. На каких расстояниях наблюдатель отчетливо видит предметы невооруженным глазом?*

Ограничение расстояний, на которых наблюдатель отчетливо видит предметы невооруженным глазом, связано со способностью глаза изменять радиус кривизны хрусталика, тем самым изменяя его фокусное расстояние. Фокусное расстояние хрусталика может изменяться от некоторого максимального значения (при наблюдении удаленных предметов) до минимального (при наблюдении предметов вблизи глаза). Нормальный глаз, настраиваясь на удаленные предметы, увеличивает фокусное расстояние хрусталика, и оно становится равным расстоянию от хрусталика до сетчатки глаза. Если мы таким глазом рассматриваем удаленные предметы через трубу, то расстояние между объективом и окуляром трубы будет равно сумме фокусных расстояний:

$$L_0 = F_1 + F_2 = 35 \text{ см}\,.$$

Глаз же нашего наблюдателя при данном L_0 не может сфокусировать изображение на сетчатке – фокус хрусталика маловат. Тогда наблюдатель начинает сдвигать окуляр и объектив, тем самым приближая первичное изображение предмета в трубе к глазу, и при $L_2 = 34{,}5$ см хрусталику удается сфокусировать изображение. Этот случай изображен на рисунке 11. В качестве предмета рассматривается точечный источник, расположенный на оптической оси системы на большом удалении. На объектив (линза $Л_1$) падает параллельный пучок света, в фокальной плоскости объекти-

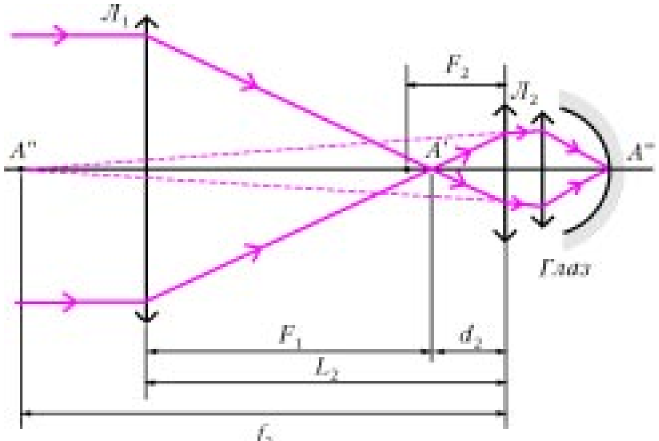


Рис. 11

ва получается первичное изображение – точка A'. Расстояние от A' до окуляра равно $d_2 = L_2 - F_1 = 4{,}5$ см. Изображение точки A' в окуляре найдем по формуле линзы, полагая, что $d_2 < F_2$:

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}, \text{ откуда } f_2 = \frac{d_2F_2}{F_2 - d_2} = 45 \text{ см}.$$

Полученное изображение A'' рассматривается глазом при максимальном фокусном расстоянии хрусталика. С этого момента глаз начинает отчетливо видеть предмет. Предмет находится на бесконечном расстоянии, а глаз его видит на расстоянии

$$f_2 = 45 \text{ см}.$$

При дальнейшем сближении объектива с окуляром глазу необходимо аккомодироваться на все более близкие точки, поскольку изображение A'' будет приближаться к глазу. Фокусное расстояние глаза будет уменьшаться и, наконец, при $L_1 = 33$ см достигнет минимума. В этот момент расстояние от изображения A' до окуляра будет равно $d_1 = L_1 - F_1 = 3$ см. А расстояние f_1 от изображения A'' до окуляра опять найдем по формуле линзы:

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_2}, \text{ откуда } f_1 = \frac{d_1F_2}{F_2 - d_1} = 7{,}5 \text{ см}.$$

Таким образом, на расстояниях больше 7,5 см и меньше 45 см наблюдатель отчетливо видит предметы невооруженным глазом.

Упражнения

1. В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см. По потолку AB ползет муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала $h = 2{,}2$ м. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы?

2. На главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см расположено плоское зеркальце на расстоянии $L = 4{,}2F$ от линзы (рис.12). Зеркальце вращается с угловой скоростью $\omega = 0{,}05$ с$^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку C. На расстоянии $d = 4F$ от линзы расположен точечный источник S. На каком расстоянии от точки C получится изображение источника S в системе линза–зеркальце? Найдите скорость этого изображения в момент, когда угол между плоскостью зеркальца и оптической осью равен $\alpha = 40°$.

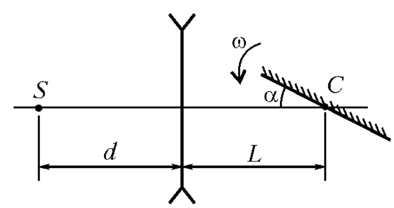


Рис. 12

3. Точечный источник света расположен на главной оптической оси слева от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см. Расстояние от источника до рассеивающей линзы $d = 40$ см. На расстоянии $L = 20$ см слева от рассеивающей линзы расположена собирающая линза. Главные оптические оси линз совпадают. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если из системы линз выходит параллельный пучок света.

4. Пожилой человек хорошо видит удаленные предметы начиная с бесконечности и до минимального расстояния $l = 2$ м. В каких очках (с минимальной оптической силой) этот человек сможет читать газету с расстояния наилучшего зрения $d_0 = 25$ см?

Ищем «экстремальный» экстремум

В.ГОЛУБЕВ

В 1992 ГОДУ НА ВСТУПИТЕЛЬНОМ ЭКЗАМЕНЕ НА БИОлогический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова была предложена такая задача:

Задача 1. *Найдите наименьшее значение величины*

$$\frac{1}{c}\left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-t^2}}\right), \qquad (1)$$

где a, b, c, t, u – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} at + bu \le c, & (2)\\ a^2 + 2bcu \ge b^2 + c^2, & (3)\\ b^2\dfrac{t^2-u^2}{t^2-1} + c^2 \le 2bcu. & (4)\end{cases}$$

Эта задача не имеет аналогов в практике вступительных экзаменов ни в прошлом, ни в настоящем. Впервые абитуриенту было необходимо найти минимальное значение функции пяти (!) переменных в некоторой области допустимых значений этих переменных. Конечно, присутствие переменных a, b, c и выражений $\sqrt{1-u^2}$, $\sqrt{1-t^2}$ указывает на возможность геометрической интерпретации задачи. И официальное решение задачи полностью основано на такой интерпретации. (Найдите это решение самостоятельно).

Ниже мы предлагаем познакомиться и с чисто алгебраическим решением.

Предварительный анализ

Во-первых, все выражения в (1)–(4) являются однородными относительно переменных a, b и c:

$\frac{1}{c}\left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{b}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ – степени ноль;

$at+bu$, c – степени один;

a^2+2bcu, b^2+c^2 – степени два;

$b^2\frac{t^2-u^2}{t^2-1}+c^2$, $2bcu$ – степени два.

И поскольку все переменные по условию есть положительные величины, то, разделив обе части неравенства (2) на c, а обе части неравенств (3) и (4) на c^2, мы можем исходную задачу 1 сформулировать в следующем равносильном виде:

Задача 2. *Найдите наименьшее значение величины*

$$\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad (5)$$

где m $\left(m=\frac{a}{c}\right)$, n $\left(n=\frac{b}{c}\right)$, t, u *– положительные числа, удовлетворяющие условиям:*

$$\begin{cases} mt+nu-1\le 0, & (6)\\ m^2+2nu-n^2-1\ge 0, & (7)\\ n^2\frac{t^2-u^2}{t^2-1}-2nu+1\le 0. & (8)\end{cases}$$

Во-вторых, слагаемые в (1) (соответственно в (5)) не содержат *общих* переменных. Этот факт провоцирует искать наименьшее значение каждого слагаемого отдельно, тем более что неравенство (8) не содержит переменную m.

В-третьих, неравенства (6)–(8) являются либо линейными, либо квадратными ((8) – после освобождения от знакопостоянного знаменателя) относительно *любой* переменной. Это позволяет надеяться на относительно легкий поиск минимума величины (5).

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи 2, равносильной задаче 1.

Краткое решение

1) $(7)\Leftrightarrow m^2\ge n^2-2nu+1=(n-u)^2+1-u^2$.

Отсюда следует, что

$$m^2\ge 1-u^2.$$

Поэтому

$$\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}\ge 3. \qquad (9)$$

2) $(8)\Leftrightarrow n^2\frac{\left(t^2-1\right)+\left(1-u^2\right)}{t^2-1}-2nu+1\le 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2\left(1-\frac{1-u^2}{1-t^2}\right)-2nu+1\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-u^2\right)\left(\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2\ge n^2-2nu+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2\ge\frac{n^2-2nu+1}{1-u^2}.$$

Так как

$$\frac{n^2-2nu+1}{1-u^2}=\frac{(n-u)^2+1-u^2}{1-u^2}\ge\frac{1-u^2}{1-u^2}=1,$$

то

$$\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}\ge 1. \qquad (10)$$

3) Равенства в (9) и (10) возможны при условиях

$$\begin{cases} n-u=0,\\ m=\sqrt{1-u^2},\\ n=\sqrt{1-t^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n=u,\\ m=\sqrt{1-u^2},\\ t=\sqrt{1-u^2}.\end{cases} \qquad (11)$$

4) В силу 1) и 2), $(11)\Rightarrow(7)$ и (8). Осталось проверить (6) при заменах (11):

$$\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-u^2}+u^2-1\le 0 \text{ – истинно.}$$

5) Таким образом, при условиях (11) достигается наименьшее значение величины (5), равное четырем.

Ответ: 4.

Подробное решение

Определение наименьшего значения слагаемого $\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}$

Переменная m содержится только в неравенствах (6) и (7). И поскольку неравенство (7) не содержит переменную t и приводимо к сравнению m^2 с квадратным трехчленом относительно n с параметром u, то оно позволяет сразу получить оценку снизу нашего слагаемого.

Имеем

$$(7)\Leftrightarrow m^2\ge n^2-2nu+1.$$

Квадратный трехчлен $n^2-2un+1$ принимает наименьшее значение при $n=u$, что легко обнаружить, если выделить полный квадрат разности n и u:

$$n^2-2nu+1=\left(n^2-2nu+u^2\right)+1-u^2=(n-u)^2+1-u^2.$$

Поэтому

$$(7)\Leftrightarrow m^2\ge(n-u)^2+1-u^2\ge 1-u^2,$$

т.е.

$$m^2\ge 1-u^2. \qquad (12)$$

В силу условия задачи, $m>0$ и $1-u^2>0$, что позволяет извлечь квадратный корень из обеих частей неравенства (12):

$$m\ge\sqrt{1-u^2}.$$

Откуда следует, что

$$\frac{m}{\sqrt{1-u^2}}\ge 1\Leftrightarrow\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}\ge 3. \qquad (13)$$

Полученное неравенство (13) означает, что

- наименьшее значение первого слагаемого в (5) *не меньше* трех,
- равенство в (13) достигается тогда и только тогда,

когда

$$\begin{cases} n - u = 0, \\ m = \sqrt{1-u^2}. \end{cases} \qquad (14)$$

Позже мы покажем, что условия (14) можно обеспечить, и, следовательно, наименьшее значение первого слагаемого в (5) равно трем.

Определение наименьшего значения слагаемого $\dfrac{n}{\sqrt{1-t^2}}$

Естественно для наших целей воспользоваться неравенством (8), так как оно единственное из неравенств (6)–(8) содержит в явном виде величину t^2.

На первой стадии выделим в дробно-рациональном относительно t выражении $\dfrac{t^2-u^2}{t^2-1}$ целую часть:

$$\frac{t^2-u^2}{t^2-1} = \frac{\left(t^2-1\right)+1-u^2}{t^2-1} = 1 + \frac{1-u^2}{t^2-1}.$$

После этого в неравенстве (8) легко выделяется величина $\dfrac{n}{\sqrt{1-t^2}}$:

$$(8) \Leftrightarrow n^2\left(1+\frac{1-u^2}{t^2-1}\right) - 2nu + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1-u^2\right)\frac{n^2}{1-t^2} \ge n^2 - 2nu + 1.$$

Так как $1-u^2>0$, то разделим обе части полученного неравенства на $1-u^2$:

$$\frac{n^2}{1-t^2} \ge \frac{n^2-2nu+1}{1-u^2}.$$

В числителе правой части – уже знакомый нам квадратный трехчлен. Поэтому легко получаем следующую оценку левой части (квадрата второго слагаемого в (5)):

$$\frac{n^2}{1-t^2} \ge \frac{(n-u)^2+1-u^2}{1-u^2} \ge \frac{1-u^2}{1-u^2} = 1,$$

т.е.

$$\frac{n^2}{1-t^2} \ge 1.$$

Учитывая положительность величин n и $1-t^2$, извлекаем квадратный корень из обеих частей:

$$\frac{n}{\sqrt{1-t^2}} \ge 1. \qquad (15)$$

Как и ранее, получаем, что

- наименьшее значение второго слагаемого в (5) *не меньше* единицы,
- равенство в (15) достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} n - u = 0, \\ n = \sqrt{1-t^2}. \end{cases} \qquad (16)$$

Определение искомого наименьшего значения суммы (5)

Покажем, что можно *одновременно* обеспечить условия (14) и (16), при которых оба слагаемых в (5) принимают наименьшие значения (3 и 1 соответственно). Действительно,

$$\begin{cases} (14), \\ (16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-u=0, \\ m=\sqrt{1-u^2}, \\ n=\sqrt{1-t^2}. \end{cases} \qquad (17)$$

Система (17) с четырьмя неизвестными позволяет три из них выразить через четвертую:

$$\begin{cases} n=u, \\ m=\sqrt{1-u^2}, \\ t=\sqrt{1-u^2}, \end{cases} \qquad (18)$$

так как при $n>0$ и $t>0$

$$n=\sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t=\sqrt{1-n^2} \quad \text{и } n=u.$$

Из первых двух пунктов следует, что в условиях (18) нестрогие неравенства (7) и (8) переходят в равенства и, тем самым, выполняются. Поэтому осталось убедиться в истинности неравенства (6) в тех же условиях (18):

$$\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-u^2} + u^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 0,$$

что, очевидно, истинно.

Отсюда следует, что искомое наименьшее значение суммы, в силу (13) и (15), равно четырем.

Теперь предлагаем читателям самостоятельно решить аналогичные задачи из других вариантов.

Упражнения

1. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{r}\left(\frac{4p}{u} + \frac{q}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

где p, q, r, u, v – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} pv + q\sqrt{1-u^2} \le r, \\ p^2 + 2qr\sqrt{1-u^2} \ge q^2 + r^2, \\ 2qr\sqrt{1-u^2} + q^2\dfrac{1-v^2-u^2}{v^2-1} \ge r^2. \end{cases}$$

2. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{b}\left(\frac{2c}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{3a}{\sqrt{1-t^2}}\right),$$

где a, b, c, t, u – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} ct \le b - au, \\ a^2 + b^2 - c^2 \le 2abu, \\ b^2 - 2abu \le a^2\dfrac{u^2-t^2}{t^2-1}. \end{cases}$$

3. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2q}{u} + \frac{r}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

где p, q, r, u, v – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} r\sqrt{1-u^2} \le p - qv, \\ r^2 + p^2 - q^2 \le 2rp\sqrt{1-u^2}, \\ p^2 + r^2\dfrac{v^2+u^2-1}{v^2-1} \le 2pr\sqrt{1-u^2}. \end{cases}$$

Материалы вступительных экзаменов 2005 года

Московский физико-технический институт (государственный университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1+\sqrt{2x-y}=\dfrac{2x-y}{xy}+\dfrac{xy}{\sqrt{2x-y}}, \\ xy\sqrt{\dfrac{xy}{2x-y}}=4-3\sqrt{2x-y}. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{(4-x)}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}<\log_{(x-4)^2}\left(4x^2-\frac{x}{4}+1-x^3\right).$$

3. Решите уравнение

$$(24\sin x+7\cos x)(75+28\cos x-25\cos 2x)=2598.$$

4. Через центр O окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведена прямая, параллельная BC и пересекающая стороны AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Окружность ω проходит через точки B_1, C_1 и касается Ω в точке K. Найдите угол между прямыми AK и BC. Найдите площадь треугольника ABC и радиус окружности Ω, если $BC=8$, $AK=5$, $B_1C_1=5$.

5. При каких значениях параметра a уравнение $\left|x^3\right|-x+a=0$ имеет единственное решение? Решите это уравнение для всех найденных значений a.

6. Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 3 и радиус основания 2. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что A и C принадлежат окружности основания, B и D принадлежат боковой поверхности, причем B принадлежит образующей OA. Известно, что $OB=OD=AB$, $AC=2\sqrt{2}$, $BD=\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды $ABCD$, двугранный угол при ребре AB и радиус сферы, описанной около $ABCD$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8x^2y-3x^4=4, \\ 8y^3-3x^2y^2=2. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin x\sin 2x}{\cos x\cos 3x}-\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{\cos 3x\cos 2x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\cos x\cos 2x}-\frac{1+2\sqrt{2}}{2\cos 2x}.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\frac{3}{4}}{x-\frac{55}{64}}}\le\frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{4}}.$$

4. Найдите стороны параллелограмма $ABCD$, в котором радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны 13 и $\sqrt{29}$ соответственно, а расстояние между центрами этих окружностей равно 10.

5. Найдите все пары действительных чисел $(x;y)$, для которых справедливо равенство

$$\log_{4^{\sqrt{x+4y}}}\left(4^{\sqrt{x+4y}}+\sqrt{\frac{y\sqrt{x}}{2}+1}\right)=3^{-\sqrt{x-4y-4\sqrt{x}}}.$$

6. Сфера касается боковых граней четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на ребрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$, $AB=9$, $SA=6$, $SB=9$, $SC=2\sqrt{33}$. Найдите длины ребер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\frac{\left|x^2-2x+\frac{3}{4}\right|+|6-2x|-5}{\sqrt{\frac{13}{2}x^2-2x^3-2x+\frac{13}{2}}}\le 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\sqrt{8}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sqrt{8}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-2\cos^4 2x}{\sin 2x}.$$

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и CD. Найдите длины отрезков BD, AE, радиус окружности, описанной около треугольника CDE, и расстояние между центрами окружностей, вписанной в треугольник ABC и описанной около треугольника ABC, если $AC=2$, $BC=4$, $CD=\sqrt{6}$.

4. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 4, угол между боковыми ребрами пирамиды равен $\arccos\frac{7}{25}$. Точки A_1 и C_1 − середины ребер AD и CD соответственно, CB_1 − высота в треугольнике CBD. Найдите

1) угол между прямыми AC и B_1C_1;
2) площадь треугольника $A_1B_1C_1$;
3) расстояние от точки A до плоскости $A_1B_1C_1$;
4) радиус вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D$ шара.

5. Найдите значения параметра a, при которых множество решений $(x;y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2+y\le 3, \\ y-a+x^2\le 0 \end{cases}$$

содержит отрезок с концами в точках $(0,1)$ и $(1,1)$.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{9}+\dfrac{xz}{25}-\dfrac{yz}{49}=1+2\ln\dfrac{7x}{15}, \\ \dfrac{xy}{9}+\dfrac{yz}{49}-\dfrac{xz}{25}=1+2\ln\dfrac{5yx}{21}, \\ \dfrac{yz}{49}+\dfrac{xz}{25}-\dfrac{xy}{9}=1+2\ln\dfrac{3z}{35}. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится клин, прислоненный к гладкой вертикальной стене (рис.1). Поверхность клина наклонена к горизонту под углом α. Автомобильное колесо массой M скатывается с клина без проскальзывания. В процессе движения колеса по клину клин действует на стену с постоянной силой F. Какой скорости достигнет колесо, пройдя по клину из состояния покоя путь s?

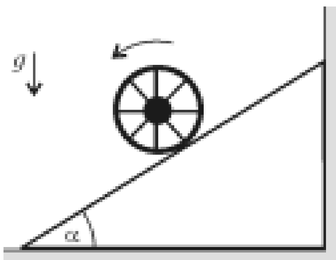


Рис. 1

2. В цилиндре под поршнем находится ненасыщенный водяной пар под давлением p = 1 атм. В процессе изобарического сжатия конечный объем, который занимает пар, оказывается в k = 4 раза меньше по сравнению с объемом, который он занимал вначале. При этом часть пара сконденсировалась, а объем образовавшейся воды составил $\alpha = 1/1720$ от конечного объема пара. Во сколько раз уменьшилась температура пара в указанном процессе? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, молярная масса пара М = 18 г/моль.

3. В схеме, изображенной на рисунке 2, определите ток через идеальный диод D и напряжение на диоде. Параметры схемы указаны на рисунке, внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

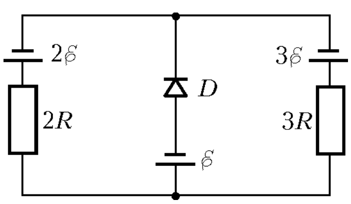


Рис. 2

4. В колебательном контуре (рис.3), включающим в себя конденсатор емкостью C и две катушки самоиндукции с индуктивностями L_1 и L_2, происходят гармонические колебания. Катушка индуктивностью L_2 с полным числом витков N и площадью одного витка S расположена в однородном и стационарном магнитном поле с индукцией B_0, перпендикулярной плоскости витков. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения U_0, магнитное поле выключают. Время убывания магнитного поля до нуля много меньше периода колебаний в контуре. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и подводящих проводов, определите величину максимального тока в контуре после выключения магнитного поля.

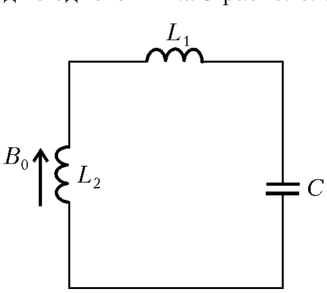


Рис. 3

5. Луч лазера, направленный под малым углом $\alpha = 0{,}1$ рад к главной оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F = 3 см, наблюдается в виде светящейся точки на экране Э, расположенном на расстоянии L = 630 см от линзы (рис.4). Если слева от линзы поставить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной d = 1 см, то светящаяся точка смещается по экрану на расстояние a = 8 см. Определите показатель преломления пластинки. *Указание*: при малых x считать, что $\operatorname{tg} x \approx x$, $\cos x \approx 1$.

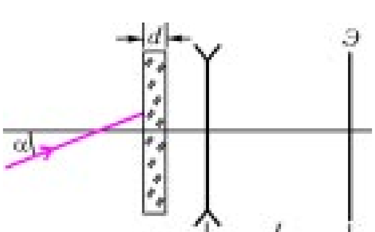


Рис. 4

Вариант 2

1. На гладкой наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту колеблются вдоль прямой с амплитудой A как оно целое шайба массой m и брусок массой $3m$ под действием пружины жесткостью k, прикрепленной к бруску (рис.5). При каком минимальном коэффициенте трения скольжения между шайбой и бруском возможны такие колебания?

Рис. 5

2. Кусок льда привязан нитью ко дну цилиндрического сосуда с водой (рис.6). Над поверхностью воды находится некоторый объем льда. Нить натянута с силой T = 1 Н. На сколько и как изменится уровень воды в сосуде, если лед растает? Площадь дна сосуда $S = 400$ см^2, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

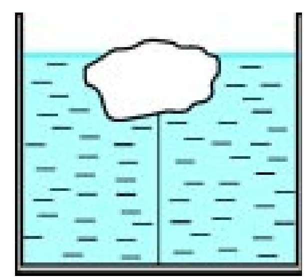


Рис. 6

3. Идеальный газ используется как рабочее тело в тепловой машине, работающей по циклу, состоящему из адиабатического расширения *1–2*, изотермического сжатия *2–3* и изобарического расширения *3–1* (рис.7). КПД цикла равен η, а при изотермическом сжатии над газом совершается работа A_T ($A_T > 0$). Какую работу совершает тепловая машина в указанном цикле?

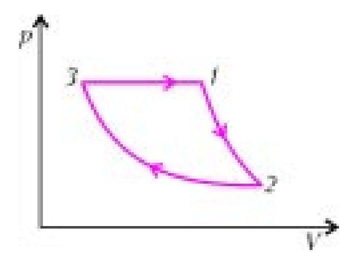


Рис. 7

4. В электрической схеме, представленной на рисунке 8, ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Ключ K_1 замыкают и после того, как через резистор сопротивлением R протек заряд q_0, замыкают ключ K_2. Найдите напряжение на катушке индуктивностью L непосредственно перед замыканием ключа K_2. Найдите также дополнительный заряд, протекший через резистор после замыкания ключа K_2. ЭДС батарей $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и их внутренние сопротивления r_1 и r_2 известны.

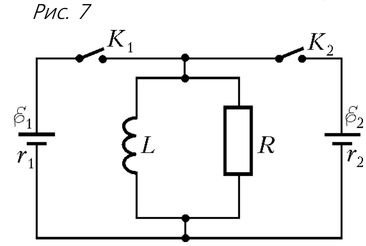


Рис. 8

5. В вакуумном фотоэлементе один из никелевых электродов освещается монохроматическим светом (рис. 9). При увеличении задерживающей разности потенциалов $U_з$ фототок уменьшается и при $U_з = 0{,}8$ В становится равным нулю. Определите длину волны света. Работа выхода электрона из никеля A = 4,84 эВ, посто-

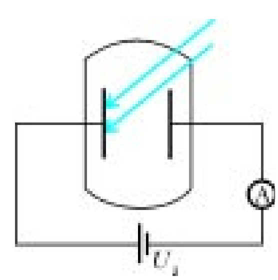


Рис. 9

янная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с , заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл , скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с .

Публикацию подготовили
Р.Константинов, В.Можаев, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство

$$\frac{5x+9}{x+1} \le x+3 .$$

2. Решите уравнение

$$(x+5)(|x|+5) = 9 .$$

3. Решите уравнение

$$2\cos x = 3\operatorname{tg} x .$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\log_4 x^2 + \log_4 (x+30) = 3 .$$

5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с основанием AC, равным 8. Точка O – центр описанной около треугольника окружности – делит высоту BD в отношении $BO : OD = 5 : 3$. Найдите боковую сторону AB.

6. Пусть A, D – точки пересечения параболы $y = -x^2 + 8x - 7$ с осью абсцисс, точка C – вершина параболы, точка B расположена на параболе между точками A и C. Найдите наибольшее значение площади четырехугольника $ABCD$.

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{4} + 1} = \cos x .$$

8. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со стороной 3. Боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{7}$. Точка M – середина ребра BC, точка N – середина ребра AC. Найдите радиус сферы, проходящей через точки S, B, M, N.

9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{2x}{x^2+1} = a - \sqrt{2x - x^2}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{3+2x} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} .$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x + 2\right) \le \log_{\frac{1}{3}}(2x+6) .$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 5\sin^2 x - 3\cos^2 x .$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} + 2y = 1, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с основанием AC, равным $2\sqrt{5}$. Высота AD, опущенная на боковую сторону BC, делит ее в отношении $BD : DC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника ABC.

6. Решите уравнение

$$2\log_4 (x+1) + \log_4 (2x-1) = 1 .$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt{4 - \cos 3x} + 2\sin x = 0 .$$

8. Нижним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC = 10$, $BC = 16$). Боковое ребро призмы равно 6. Через сторону BC проведена плоскость, образующая с основанием ABC угол α . Площадь сечения призмы этой плоскостью равна 75. Найдите угол α .

9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_3 (2\sin x - a) = \log_3 \left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)$$

имеет единственное решение, принадлежащее отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В результате циклического процесса газ получил от нагревателя количество теплоты $Q_н = 500$ Дж и совершил работу $A = 100$ Дж. Определите количество теплоты, переданное холодильнику.

2. Тело массой $m = 200$ г бросили горизонтально с высоты $h = 15$ м. Определите изменение импульса тела за время полета.

3. Стержень массой m и длиной L подвешен за один конец на тонкой невесомой нити. Нижний конец стержня расположен на расстоянии h над поверхностью воды. Стержень начинают равномерно опускать в воду. Постройте график зависимости силы натяжения нити от перемещения. Плотность материала стержня в четыре раза больше плотности воды.

4. По кольцу радиусом $R = 1{,}5$ см течет ток силой $I = 1{,}5$ А. Кольцо помещено в однородное магнитное поле индукцией $B = 0{,}10$ Тл. Линии индукции перпендикулярны плоскости кольца. Определите силу, растягивающую кольцо, и направление электрического тока.

5. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В замкнут на резистор. Определите внутреннее сопротивление источника тока, если при КПД источника $\eta = 80\%$ на резисторе выделяется мощность $P = 2{,}3$ Вт.

Вариант 2

1. Два конденсатора, емкости которых $C_1 = 4{,}0$ мкФ и $C_2 = 2{,}0$ мкФ , соединены параллельно и подключены к источнику напряжением $U = 20$ В. Найдите общий заряд на конденсаторах.

2. Действительное изображение точки находится на расстоянии $h = 12$ см от главной оптической оси линзы и на расстоянии $f = 20$ см от самой линзы. Найдите, где расположена точка. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см.

3. Движение груза, прикрепленного к пружине, описывается уравнением $x = A\cos\omega t$, причем $A = 10$ мм, а $\omega = 50\ \text{с}^{-1}$. Найдите среднюю путевую скорость за первые три четверти периода.

4. Электрон влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам с начальной скоростью $v_0 = 4{,}0\cdot10^6$ м/с. Найдите изменение импульса электрона за время пролета внутри конденсатора. Длина пластин конденсатора $l = 2{,}0$ см, а напряженность поля внутри конденсатора $E = 20$ кВ/м. Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

5. КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермического расширения *1–2*, изохорного процесса *2–3* и адиабатического сжатия *3–1*, равен η. Максимальная разность температур в цикле равна ΔT. Найдите работу, совершенную при изотермическом процессе. Рабочим телом является один моль идеального одноатомного газа.

Публикацию подготовили
Ю.Колмаков, Ю.Сезонов

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Вычислите

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{1{,}5}\cdot\frac{9^{1{,}75}\cdot\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{25}}+\frac{3\arccos\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}\right)}{\pi}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{4}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)=0.$$

3. Решите неравенство

$$\left|5-5\log_{|x|}|5x|\right|\le 5.$$

4. Для вязания используют три мотка шерсти. Из первого мотка использовали две трети, из второго использовали 50%, а третий моток, содержавший одну треть всей шерсти, использовали весь. Сколько процентов шерсти использовали, если ее осталось в два раза меньше, чем было в первом мотке?

5. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=7+0{,}5^{3+\sqrt{x-8}}$$

на отрезке $[12; 17]$.

6. При каких значениях параметра a функция

$$f(x)=-5x^3+2ax^2+8ax-5{,}8$$

строго убывает на всей числовой оси?

7. Прямые KB и KC касаются окружности с центром O в точках B и C соответственно. Найдите площадь круга, если $KO = 10$, а $BC = 6$.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K лежит на ребре AB, $3AK = 2KB$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K и C_1 параллельно диагонали квадрата ADD_1A_1, и найдите отношение объемов куба и большего из полученных многогранников.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Вычислите

$$\sqrt{125}\cdot\sqrt{20}\cdot32^{0{,}2}.$$

2. Решите уравнение

$$(\operatorname{tg}0{,}3)^{\frac{x^2-3x+2}{x-1}}=1.$$

3. Решите неравенство

$$2\log_5 x-\log_x 125<1.$$

4. Решите уравнение

$$\cos4x+2\cos^2x=1.$$

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}36|x-1|>|x-1|x^2,\\(x+5)^{-0{,}28}\ge0.\end{cases}$$

6. Найдите производную функции

$$y=x^{-78}-2x^{16}+\sqrt{17{,}4}.$$

7. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=x+\ln(1-4x).$$

8. Найдите объем параллелепипеда с ребрами 10, 7, 6, выходящими из одной вершины и образующими друг с другом углы $90°, 60°, 30°$.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Вычислите

$$(\sin15°\cos75°-\sin75°\cos15°)\cdot3^{0{,}5}.$$

2. Решите неравенство

$$\left|5-|2x-1|\right|\le4.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2-2x\right)<\log_{0{,}2}0{,}008.$$

4. Решите уравнение

$$\cos^2x+3\cos x\sin x+2\sin^2x=2.$$

5. Решите систему

$$\begin{cases}\left(\sqrt{0{,}28}\right)^{4-x^2}=2^{\sin\pi},\\x+1<0.\end{cases}$$

6. Найдите производную функции

$$y=(x-2)e^{2-x}+17.$$

7. В каких точках касательная к графику функции

$$f(x)=2x^3+3x-1$$

параллельна прямой $y=9x-7$?

8. Ребро правильного тетраэдра равно $3\sqrt{2}$. Найдите объем тетраэдра.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{\sqrt{3}+2}\right)^{3x} - 7^{\log_{49}16} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{3x} = 0 .$$

2. Решите уравнение

$$\left(4x^2 - 10x + 5\right)\sqrt{1-\sin^2 2x} = \cos 2x .$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} 4\sin x \sin y = -1, \\ \cos y \cos x = 0,75, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых корни уравнения

$$28a + (8a-7)x = x^2 + (4a)^2$$

относятся как 10:1.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^3 - 2ax^2 - 4a^2x - 5$$

строго убывает на отрезке $[-6; 2]$.

6. Функция $f(x)$ определена и строго убывает на всей числовой оси. Решите неравенство

$$f\left(0,5\log_2(24-t)\right) > f\left(1+\log_4\left(6-t^2-t\right)\right).$$

7. Найдите

$$2\sin^6 x + 2\cos^6 x + 1 ,$$

если

$$2\sin x + 2\cos x + 1 = 0 .$$

8. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{\left|x^2-3x-4\right| \cdot 0,5^x}{3x - x^2 + 4} .$$

9. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K, причем $AK = 0,625\ KB$. Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 36.

10. Площадь боковой поверхности конуса составляет 0,75 площади его полной поверхности. Найдите высоту конуса, если его объем равен объему шара радиуса $\sqrt[3]{16}$.

Тест

(собеседование для медалистов, поступающих на математический факультет)

В заданиях 1–7 дано несколько ответов, из которых только один верный. Выберите правильный ответ.

1. Найдите положительное число, 20% от которого составляет 45% от числа, ему обратного:

1) 3; 2) 1,5; 3) 1; 4) 0,5.

2. Вычислите значение дроби $\dfrac{5m^2+6mn+n^2}{5m^2-4mn-n^2}$, если $\dfrac{m}{n} = \dfrac{5}{7}$:

1) −2; 2) −3; 3) −4; 4) −6.

3. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = -3x^3 + 4x^2 + 5x - 22$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$:

1) −10; 2) 10; 3) −15; 4) 15.

4. Вычислите значение выражения $\log_2\left(\log_{\sqrt{2}} 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2\right)$:

1) −1; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

5. Известно, что $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$, а $\cos\alpha\cos\beta = 0,5$. Найдите значение $10\cos(\alpha - \beta)$:

1) 5; 2) 1; 3) −1; 4) −2.

6. Найдите сумму длин промежутков, составляющих множество решений неравенства $\dfrac{36}{x^2-x} \ge x^2 - x$:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

7. Известно, что

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 - xy = 2. \end{cases}$$

Найдите наибольшее возможное значение $x + y$:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

В заданиях 8–14 запишите ответ.

8. В треугольнике ABC угол A равен $76°$, угол B равен $82°$. Найдите величину угла (в градусах) между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины A.

9. Найдите сумму целых решений неравенства

$$|4x-3| \le 8 .$$

10. Вычислите косинус угла A в треугольнике с вершинами $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$, $C(1; -2; 1)$.

11. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{18-x} \cdot \log_{0,5}\left(\frac{x-15}{5}\right) \ge 0 .$$

12. Найдите решение уравнения

$$2\cos\frac{\pi x}{9} = -\sqrt{3}$$

на промежутке $8 < x < 20$.

13. Найдите наименьшее значение выражения

$$4 - \sqrt{9 - \sqrt{2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9}} .$$

14. Найдите расстояние между линиями $x^2 + y^2 = 1$ и $y = x - 2$.

ФИЗИКА

Физический факультет

Письменный экзамен

Задание состоит из двух частей. В первой части 15 тестовых задач с выбором из трех ответов. Каждая задача оценивается в 1 балл. Во второй части 5 более сложных задач, каждая из которых оценивается в 2 балла.

В вычислениях следует использовать следующие округленные значения физических величин:

ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2;

универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К);

элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл;

постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с;

скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Вариант 1

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Чему равна средняя скорость лыжника, прошедшего путь 18 км за 2 ч:

1) 0,25 м/с; 2) 2,5 м/с; 3) 10 м/с?

2. Чему равен путь, пройденный телом за 15 с, если его ускорение составляет $4\ \text{м/с}^2$, а начальная скорость равна нулю:

1) 30 м; 2) 450 м; 3) 1500 м?

3. Состояние невесомости возникает, когда тело имеет:

1) равную нулю массу; 2) равный нулю вес; 3) равную нулю скорость.

4. Сила, под действием которой тело массой 250 г движется с ускорением $2\ \text{м/с}^2$, равна:

1) 0,5 Н; 2) 125 Н; 3) 500 Н.

5. Работа, совершаемая силой тяжести, действующей на дождевую каплю массой 40 мг при ее падении с высоты 2 км, равна:

1) 0,8 Дж; 2) 8 Дж; 3) 80 Дж.

6. В каком процессе количество теплоты, переданное газу, равно работе, совершаемой газом:

1) в изотермическом; 2) в изохорном; 3) в адиабатном?

7. Поршень в цилиндре медленно опустили на 1/3 высоты цилиндра. Чему равно отношение давления газа в конечном состоянии к его начальному давлению:

1) 2/3; 2) 1,5; 3) 3?

8. Газ, находящийся под давлением $2\cdot10^5$ Па, изобарно расширяется от объема 2 л в начальном состоянии до объема 5 л. Чему равна работа, совершенная газом:

1) 600 Дж; 2) 600 кДж; 3) 600 МДж?

9. Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении заряда $5\cdot10^{-9}$ Кл из точки с потенциалом 300 В в точку с потенциалом 100 В, равна:

1) $2{,}5\cdot10^{-9}$ Дж; 2) 10^{-6} Дж; 3) $0{,}4\cdot10^{-6}$ Дж.

10. Как изменится напряженность электрического поля между пластинами воздушного конденсатора, соединенного с источником тока, при уменьшении расстояния между пластинами конденсатора в 3 раза:

1) уменьшится в 3 раза; 2) увеличится в 3 раза; 3) не изменится?

11. Чему равен заряд, проходящий через паяльник за 2 мин, если известно, что ток в паяльнике равен 500 мА:

1) 60 Кл; 2) 240 Кл; 3) 1000 Кл?

12. На проводник длиной 10 см, расположенный перпендикулярно линиям индукции магнитного поля, действует сила 5 Н. Сила тока в проводнике 25 А. Чему равна индукция магнитного поля:

1) 2 Тл; 2) 50 Тл; 3) 1250 Тл?

13. Человек стоит на расстоянии 3 м от вертикально расположенного плоского зеркала. Если зеркало отодвинуть от человека на 1 м, то расстояние от человека до его изображения увеличится на:

1) 1 м; 2) 2 м; 3) 3 м.

14. Как изменится частота электромагнитных колебаний в колебательном контуре, если индуктивность катушки увеличить в 4 раза:

1) уменьшится в 4 раза; 2) уменьшится в 2 раза; 3) увеличится в 2 раза?

15. Период полураспада радиоактивного изотопа равен 8 ч. Какая часть атомов останется через 24 ч:

1) 1/8; 2) 1/4; 3) 1/2?

Часть 2. Решите задачи

16. Автомобиль, первоначально двигавшийся с постоянной скоростью, затем в течение 10 с едет с ускорением $0{,}8\ \text{м/с}^2$. Чему равна начальная скорость автомобиля при его равноускоренном движении, если известно, что за 10 с он прошел путь, равный 130 м?

17. Между двумя шарами массами 4 кг и 8 кг, движущимися со скоростями 8 м/с и 2 м/с соответственно в одном направлении вдоль одной прямой, происходит неупругое соударение. С какой скоростью они будут двигаться после соударения?

18. Чему равна плотность кислорода при давлении $2{,}49\cdot10^5$ Па и температуре 640 К?

19. Какое количество теплоты выделится за 40 мин в медных проводниках, подводящих электрический ток к плитке, при силе тока 5 А? Площадь поперечного сечения и длина проводника 1,5 мм^2 и 3 м соответственно. Удельное сопротивление меди $1{,}7\cdot10^{-2}\ \text{Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$.

20. Чему равна емкость конденсатора радиопередатчика, работающего на частоте $2\cdot10^6$ Гц, если индуктивность контура $8\cdot10^{-6}$ Гн? Считать $\pi^2 = 10$.

Вариант 2

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. За какое время лыжник пройдет 18 км пути при средней скорости его движения 2,5 м/с:

1) 2 ч; 2) 5 ч; 3) 7,2 ч?

2. За какое время автомобиль, двигаясь с ускорением $0{,}5\ \text{м/с}^2$, увеличит свою скорость с 5 м/с до 15 м/с:

1) 5 с; 2) 10 с; 3) 20 с?

3. Мяч массой 0,5 кг после удара, длящегося 0,01 с, приобретает скорость 5 м/с. Чему равна сила, с которой ударили по мячу:

1) 0,25 Н; 2) 10 Н; 3) 250 Н?

4. Как движется тело, если сумма всех действующих на него сил равна нулю:

1) неравномерно; 2) прямолинейно и равномерно; 3) равномерно по окружности?

5. С какой скоростью равномерно катится тележка массой 5 кг, если ее импульс равен $25\ \text{кг}\cdot\text{м/с}$:

1) 0,2 м/с; 2) 5 м/с; 3) 125 м/с?

6. Как изменится давление идеального газа, если при неизменной концентрации средняя кинетическая энергия молекул уменьшится в 3 раза:

1) увеличится в 3 раза; 2) уменьшится в 3 раза; 3) уменьшится в 9 раз?

7. Газ нагрели от 47 °С до 207 °С. Чему равно отношение объема газа в конечном состоянии к его начальному объему, если считать процесс изобарным:

1) 2/3; 2) 1,5; 3) 4,4?

8. Кусок льда объемом $1000\ \text{см}^3$, имеющий температуру 0 °С, внесли в теплую комнату, и он превратился в воду той же температуры. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг. Какое количество теплоты было передано льду:

1) 29,7 кДж; 2) 33 кДж; 3) 297 кДж?

9. Частица массой 2 мг, заряд которой $2\cdot10^{-8}$ Кл, движется под действием электрического поля с ускорением $5\ \text{м/с}^2$. Чему равна напряженность электрического поля:

1)100 В/м; 2) 200 В/м; 3) 500 В/м?

10. Как изменится заряд пластин конденсатора, соединенного с источником тока, при увеличении емкости конденсатора в 3 раза:

1) уменьшится в 3 раза; 2) увеличится в 3 раза; 3) не изменится?

11. Второй провод длиннее первого в 6 раз и имеет в 3 раза большую площадь поперечного сечения. Чему равно отноше

(Продолжение см. на с. 55)

Очередной набор в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, в сорок первый раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «ОТКРЫТЫЙ» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по созданию Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2006 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, и в филологии, и в экономике, и в других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке). Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию, который прошел летом 2004 года в Дании, рассказ о 40-летней работе математического отделения ОЛ ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Если у вас имеется такая возможность, вы будете частично общаться с нашей школой с помощью Интернета – чем дальше, тем больше.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на отделение экономики – на открытке). Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают *в отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образ*ование (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2006 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить.*

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад (не обязательно участие в самых последних олимпиадах).

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. По просьбе тех учащихся, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться по любому адресу – в школу, в орган народного образования, к другому спонсору – с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется еще одна форма – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2006 года.* Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2006 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделение математики, высылают вступительные работы по адресу: 198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (с указанием отделения).

Телефон: (095) 939-39-30.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

- при университетах – в городах Донецк (Украина), Екатеринбург, Иваново, Майкоп, Ульяновск, Челябинск, Ярославль;
- при педагогическом институте в городе Кирове;
- при Брянском центре технического творчества молодежи.

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных экзаменов и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс смогут выбирать новые пособия, разработанные для будущих физиков и биологов, химиков и историков...

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2006 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й курс – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 5-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить.

Срок отправки работы – до 15 апреля 2006 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Задачи

(звездочкой отмечены более трудные, с точки зрения составителей работы, задачи)

1 (6–10). От двух круглых бревен одинакового диаметра отпилили по одинаковому куску, и первое бревно стало втрое длиннее второго. После того, как от них еще раз отрезали по такому же куску, второе бревно стало короче первого в четыре раза. Во сколько раз первое бревно было вначале длиннее второго?

2 (6–10). Сколько существует пар целых чисел $(x; y)$ таких, что $xy = 2002^2$?

3 (6–10). Какое наибольшее число полосок размером 1×5 клеток можно выкроить из квадратного листа клетчатой бумаги размером 8×8 клеток?

4 (6–10). Стрелок выбивает при выстреле либо 8, либо 9, либо 10 очков. Сделав более 11 выстрелов, он набрал 100 очков. Выясните, сколько раз и с каким результатом он стрелял.

5 (8–10). Какое наименьшее и какое наибольшее целое значение принимает функция $y = \dfrac{x^2 + x - 16}{x - 1}$ при целых значениях x? Укажите также эти значения x.

6 (8–10). Точка M расположена вне правильного треугольника ABC так, что угол CMA равен 30°, а угол BMA равен 45°. Найдите угол ABM.

7 (7–10). Мальчик Петя начал писать контрольную работу между 10 и 11 часами, а закончил – между 14 и 15 часами. Он заметил, что за время его мучений стрелки часов поменялись местами. Сколько было времени, когда он закончил работу?

8 (8–10). Найдите стороны треугольника, если известно, что они – последовательные целые числа и что одна из его медиан перпендикулярна биссектрисе, проведенной из другой вершины.

9 (9–10). Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6y \le 0, \\ y^2 - 2xy + 9 \le 0. \end{cases}$$

10* (6–10). На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размером 11×15 клеток (11 строк и 15 столбцов), стороны которого идут по линиям сетки. Некоторые клетки прямоугольника оставлены белыми, а остальные – выкрашены в черный цвет, причем в каждой из 11 строк белых клеток больше, чем черных. Верно ли, что хотя бы в одном столбце белых клеток тоже больше?

11* (9–10). Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0, \\ y + z^2 + x^4 = 0, \\ z + x^2 + y^4 = 0\,? \end{cases}$$

12* (6–10). Семья состоит из A, его жены B и троих детей: C, D и E. Известно, что в некоторый момент времени: а) если A смотрел телевизор, то и B его смотрела; б) хотя бы один из D и E смотрел телевизор; в) ровно один из B и C его смотрел; г) C и D либо оба смотрели, либо оба не смотрели телевизор; д) если E смотрел телевизор, то A и D тоже его смотрели. Кто смотрел и кто не смотрел телевизор?

Отделение биологии

Набор объявляется в 33-й раз. Зачисление проводится на конкурсной основе по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе, независимо от места проживания. Обучение в первом случае длится 3 года, во втором – 2 года.

Учащимся восьмых классов необходимо решить задачи 1–5 помещенной ниже вступительной работы, учащимся девятых – задачи 3–8.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники.

Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения Приемной комиссии).

Срок отправки работы – до 1 мая 2006 года.

Задачи

1. В сельскохозяйственной практике широко используют органические удобрения – навоз, компосты, зеленые удобрения, препараты на основе ила, бактериальные удобрения и др. Но ведь растения в ходе фотосинтеза сами получают необходимую им органику. Каков же тогда смысл применения этих удобрений?

2. В советские времена практически все фильмы о заграничной жизни снимали, не покидая пределов страны. Представьте себе, что вы отвечаете за инсценировку книги: а) «Белый Клык»; б) «Илиада»; в) «Книга джунглей»; г) «Легенда о Робин Гуде»; д) «Остров сокровищ»; е) «Пожиратели огня»; ж) «Приключения Гекльберри Финна»; з) «Пятнадцатилетний капитан»; и) «Сто лет одиночества» ; к) «Фараон». Куда вы отправите съемочную группу в каждом из этих случаев и почему? Как вы думаете, по каким признакам зритель все-таки сможет догадаться о подмене, несмотря на старания кинематографистов?

3. Вам поручено сравнить гуппи, лягушек, голубей, лошадей, кошек и собак по способности к обучению. Опишите, как вы будете проводить эксперименты для решения этой задачи. Важно, чтобы полученная информация не просто описывала поведение животных в условиях ваших опытов, а была максимально полезной для анализа разнообразных реально возникающих ситуаций. Поэтому необходимо предложить наиболее корректную схему экспериментов и убедительно доказать, что на результаты и выводы из них не влияют посторонние, случайные и неучтенные факторы.

4. Отправляясь в плавание, Робинзон Крузо взял с собой собранную им коллекцию семян культурных растений разных стран и народов, которую собирался подарить кузине. Но судно разбилось неподалеку от необитаемого острова, и Робинзон, заботясь о выживании в этой печальной ситуации, перетаскивает на берег имущество, найденное среди обломков. Как поступить с коллекцией? Она довольно большая, и вряд ли стоит тратить время и силы на то, чтобы спасти ее целиком. Семенами каких растений вы рекомендуете заняться в первую очередь, а какие семена в сложившейся ситуации представляются совершенно ненужными? Ответы обоснуйте.

5. У одних видов организмов плотность особей на единицу площади обитания относительно стабильна в разные сезоны и годы, а у других – скачкообразно меняется. Приведите примеры тех и других видов. Перечислите причины, с которыми могут быть связаны указанные отличия.

6. В почве обитают представители самых разных групп животных. Какие приспособления к такому образу жизни у них возникли? Для каждого из указанных вами приспособлений приведите по одному-два примера животных, у которых оно имеется.

7. Обычный анализ крови, который вам делают при периодических обследованиях в поликлинике, включает определение стандартного набора параметров. Какие болезни и физиологические расстройства могут быть выявлены на основании этого анализа? Перечислите, для каких диагностических целей необходимо определение дополнительных характеристик состава крови. Какие параметры следует измерять в каждом из этих случаев?

8. Вы решили разработать лекарственный препарат, обеспечивающий: а) снижение повышенного кровяного давления; б) ослабление аллергических реакций; в) уменьшение вероятности заболевания гриппом; г) быстрое заживление ран. Однако в аптеках уже имеется множество препаратов, решающих каждую из этих задач. Какие свойства нового лекарства сделают его применение предпочтительным? Нетрудно дать риторический ответ: «Лекарство должно давать более сильный эффект и действовать быстрее». Однако подобные рекомендации никак не объясняют, в каком направлении вести исследования. Постарайтесь для каждой из четырех задач указать несколько конкретных требований, в соответствии с которыми можно направленно подбирать физиологически активные соединения и определять форму их использования.

Отделение физики

Отделение работает 14 лет. Обучение одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток принимаются оканчивающие в 2006 году 8 классов средней школы, на двухгодичный – 9 классов и на одногодичный – 10 классов. Для поступления на трехгодичный поток нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на двухгодичный поток – задачи 4–9 и на трехгодичный – задачи 5–10. Индивидуальные учащиеся, оканчивающие 10 класс, могут пройти программу двухгодичного потока за один год, тогда нужно написать «10+11» на обложке тетради и решить задачи 4–10.

Срок отправки работы – до 1 июня 2006 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в 9, 10 и 11 классы без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задачи

1. Мальчик и девочка качаются на доске, шарнирно закрепленной в ее середине. Первоначально они сидят таким образом, что уравновешивают друг друга. Когда к девочке на руки запрыгивает кот, мальчику для поддержания равновесия приходится сесть в полтора раза дальше от середины доски, чем он сидел вначале. После этого кот переходит на руки к мальчику, и уже девочка должна занять место вдвое дальше от середины доски, чем она сидела до этого. Найдите массу мальчика и массу девочки, если масса кота $m = 10$ кг.

2. Для измерения ЭДС батарейки $\mathcal{E}$ и ее внутреннего сопротивления r собрали две схемы (рис.1). В первой схеме

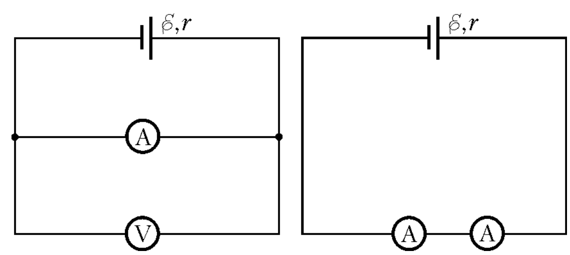


Рис. 1

амперметр показал ток $I_1 = 3$ А, а вольтметр – напряжение $U_1 = 3$ В. Во второй схеме оба амперметра показали ток $I_2 = 2$ А. Определите по этим данным значения $\mathcal{E}$ и r, считая, что все амперметры одинаковые, а сопротивление вольтметра очень велико.

3. В одном из калориметров находится вода, а в другом – лед. Температура льда $t_л = {}^\circ\ {}^\circ\text{C}$. После смешивания содержимого калориметров остается только вода при $t_в = {}^\circ\ {}^\circ\text{C}$. Если же влить в калориметр со льдом лишь $1/3$ часть воды, то в тепловом равновесии массы льда и воды в этом калориметре будут равны. Найдите начальную температуру воды. Теплоемкостью калориметров пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

4. Брусок сливочного масла массой $m = 500$ г опустили в кастрюлю с горячим молоком. Найдите, на сколько изменится уровень жидкости в кастрюле, когда масло растает. Площадь сечения кастрюли $S = 200$ см^2. Плотность растопленного масла $\rho_1 = 0{,}9$ г/см^3, молока $\rho_2 = 1{,}0$ г/см^3.

5. На расстоянии s от лампочки находится экран с круглым отверстием радиусом r, при этом перпендикуляр, опущенный из лампочки на экран, проходит через центр отверстия (рис.2). На расстоянии L от лампочки перпендикулярно экрану расположено зеркало. На каком минимальном расстоянии a за экраном параллельно ему надо установить другой экран, чтобы два световых пятна на нем не перекрывались?

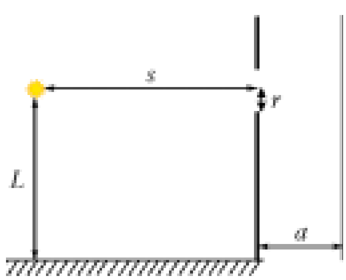


Рис. 2

6. На двух одинаковых качелях, расположенных параллельно друг другу, качаются двое детей, при этом у обоих максимальное отклонение веревки с сиденьем от вертикали составляет угол $\alpha = 45^\circ$. Постройте траекторию одного ребенка относительно другого в случаях, когда: а) качели раскачиваются в фазе и все время отклонены в одинаковые стороны; б) качели раскачиваются в противофазе и все время отклонены в противоположные стороны. Длина веревки d, расстояние между качелями в покое L.

7. Тело скользит по столу вдоль прямой AB под действием постоянной силы. Время прохождения гладкого участка AC вдвое меньше, чем шероховатого участка CB. Найдите среднюю величину скорости тела за вторую половину: а) времени движения; б) пути от точки A к точке B. Известно, что в точке C величина скорости тела составляет $v_C = 15$ м/с, а в точках A и B скорость тела равна нулю.

8. Тележка массой $M = 4$ кг катится по горизонтальной поверхности со скоростью $u_0 = 1$ м/с. На тележке стоит машинка массой $m = 1$ кг, которая начинает ездить вдоль и противоположно направлению движения тележки. Относительная скорость машинки изменяется от 0 до $v_{\max} = 10$ м/с. Найдите, в каких пределах изменяется при этом скорость тележки.

9. Система двух брусков массой m_1 и m_2, соединенных идеальной пружиной, стоит на горизонтальной поверхности (рис.3). На верхнем бруске лежит шарик, который в некоторый момент скатывается вниз. При какой минимальной массе m шарика нижний брусок в последующем подпрыгнет?

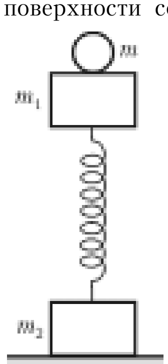


Рис. 3

10. Над одноатомным идеальным газом проводят цикл Карно *1–2–3–4–1* (кривые *1–2* и *3 4* – изотермы, *2–3* и *4–1* – адиабаты, в точке *1* газ имеет наименьший объем), характеризующийся КПД $\eta_К$. Найдите КПД η цикла *1–2–4–1*, проводимого над тем же газом, если известно, что точки *2* и *4* лежат на одной изобаре.

Отделение химии

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 и 10 классов средней школы.

Полная программа обучения на отделении – три года.

Программа включает следующие одногодичные курсы:
- общая химия (с элементами неорганической химии);
- неорганическая химия;
- органическая химия;
- химия окружающей среды (полгода).

Если вы хотите научиться решать задачи, вам будет полезен курс «Методы решений задач». Его можно совмещать с другими курсами.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Срок отправки работы – до 15 июня 2006 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, по заявлению руководителя.

Задачи

1. Соль кислородсодержащей кислоты содержит 36,62 масс.% калия и 33, 33 масс.% хлора. Определите состав соли.

2. Приведите 3 примера сложных веществ, в состав которых входят только частицы с электронным строением $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6$. Укажите валентности (степени окисления) атомов, входящих в состав этих веществ.

3. Какую среду может иметь раствор кислой соли? Объясните, приведите примеры.

4. 15,5 г фосфора сожгли в избытке кислорода, продукт сгорания поглотили, используя 200 г 15%-го раствора гидроксида натрия. Определите состав и массовые доли веществ в образовавшемся растворе.

5. В 4 пробирках находятся растворы нитрата свинца (II), гидроксида цезия, иодида рубидия и хлороводородной кислоты. Как распознать, в какой пробирке какое вещество? Предложите способ, использующий минимальное число дополнительных реагентов. Напишите уравнения реакций и укажите признаки реакций.

6. Этиловый эфир *n*-аминобензойной кислоты используется в медицине (препарат анестезин) как местное обезболивающее средство, например при болях слизистой желудка. Какое вещество образуется первым при попадании таблетки анестезина в желудок? Напишите реакции взаимодействия этилового эфира *n*-аминобензойной кислоты с: а) бромной водой; б) разбавленным раствором серной кислоты при нагревании; в) водным раствором гидроксида натрия при нагревании.

Отделение филологии

Отделение существует с 1989 года. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

Принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов.

Отделение предлагает на выбор 15 учебных программ.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Научиться говорить по-английски и понимать английскую речь? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда пришлите нам вступительную работу – ответы на вопросы помещенного ниже теста.

Внимание! Отвечайте на вопросы теста на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон (если есть). Затем *полностью перепишите условия теста* и *выполните задания 1 – 5* (впишите или подчеркните нужное, проставьте цифры).

Тест

1. Впишите нужное

К 1 сентября 2006 года я закончу ______ класс.

Моя средняя оценка:

по русскому языку _______;

по литературе _______.

2. Подчеркните нужное

Моя грамотность:

а) абсолютная;

б) вполне приличная;

в) так себе;

г) низкая.

3. Расставьте цифры от 1 до 8 в соответствии с тем, насколько для вас важны следующие задачи (1 – самое важное; 8 – наименее важное):

___узнать как можно больше об устройстве русского языка;

___узнать как можно больше о русской литературе;

___научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;

___писать грамотнее;

___узнать больше об устройстве языков мира;

___узнать больше о том, что за наука – литературоведение;

___научится читать и говорить по-английски;

___попробовать свои силы в журналистике.

4. Подчеркните нужное

Надеюсь, что учеба на филологическом отделении ОЛ ВЗМШ даст мне возможность:

а) удовлетворить свое природное любопытство;

б) заняться в свободное время тем, что мне интересно;

в) исправить школьные оценки по русскому языку и литературе;

г) приобрести знания и навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз.

5. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз:

а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;

б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;

в) в негуманитарный вуз и писать изложение;

г) в негуманитарный вуз и писать диктант;

д) в негуманитарный вуз и писать тест;

е) мне важно школу закончить!

Срок отправки работы – до 1 июня 2006 года.

Вместе с анкетой пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Группам «Коллективный ученик» предлагаются курсы по русскому языку и литературе.

Отделение экономики

Экономическое отделение основано в 1993 году. Обучение проводится по двум основным программам: «Прикладная экономика» и «Экономика и география». Программа «Прикладная экономика» включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке. Учащиеся программы «Экономика и география», помимо изучения основ экономической теории, знакомятся с физической и экономической географией, участвуют заочно в увлекательных путешествиях по странам мира.

Окончившим одну из основных программ предлагается специализация по выбору: «Основы предпринимательства и менеджмента», «Бухгалтерский учет и финансовый анализ», «Мировая экономика», «Экономика России: прошлое, настоящее и будущее».

На отделение принимаются все желающие с образованием не ниже 7 классов средней школы. Обучение проводится либо индивидуально, либо в небольших группах (2–4 человека). Формы обучения «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет.

Учащимся 10–11 классов, желающим подготовиться одновременно к вступительным экзаменам на экономический факультет МГУ и в другие экономические вузы, предлагается специальная программа «Экономика ПЛЮС», включающая, наряду с экономическими дисциплинами, углубленное изучение нескольких дополнительных предметов: математики, обществознания, русского языка и литературы. Для школьников, интересующихся географической наукой и собирающихся поступать на географический факультет МГУ или другого вуза, существует программа «География ПЛЮС», созданная преподавателями ОЛ ВЗМШ и географического факультета МГУ на основе опыта подготовительных курсов по географии Московского университета.

Вступительная работа для учащихся дается в форме теста. Решения присылайте *только* на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – *печатными буквами*); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест-2006». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным.

В 2006 году Россия будет председательствовать в «Большой восьмерке» – клубе ведущих стран. Поэтому этот тест мы решили посвятить месту России в мире и перспективам ее развития. Правильно ответившие на все вопросы получат из своих ответов выражение, которым охарактеризовал Россию великий русский писатель XIX века.

Срок отправки работы – до 15 мая 2006 года.

Тест

1. По какому показателю Россия находится впереди «Европы всей»:

Р) размеру дефицита государственного бюджета;

С) величине экспорта;

Т) объему золотовалютных резервов;

Н) величине государственного долга;

П) размеру валового внутреннего продукта?

2. Членом какого международного объединения НЕ является Россия:

У) Международного валютного фонда;

Р) Всемирной торговой организации;
Л) Содружества независимых государств;
А) Совета Европы;
О) Организации Объединенных Наций?

3. Представители какого философского течения считали, что Россия должна теснее взаимодействовать с Европой, войти в европейскую жизнь в качестве ее полноправного участника:
С) евразийство;
Ш) русский космизм;
Т) славянофильство;
О) западничество;
А) ленинизм?

4. Представители России никогда НЕ получали Нобелевскую премию в области:
В) химии;
Р) физики;
Й) математики;
Ь) экономики;
А) литературы.

5. Какой русский государь, по словам А.С.Пушкина, «в Европу прорубил окно»:
К) Петр Великий;
С) Александр Невский;
Р) Юрий Долгорукий;
И) Василий Темный;
Я) Иван Грозный?

6. Какая из этих территорий принадлежит России в настоящее время:
О) архипелаг Александра;
М) город Росток;
Н) остров Надежды;
В) острова Россиян;
А) архипелаг Земля Франца-Иосифа?

7. Назовите самого жадного и экономически нерационального героя поэмы Н.В.Гоголя «Мертвые души»:
Л) Коробочка;
Я) Ноздрев;
Р) Плюшкин;
С) Манилов;
Т) Чичиков.

8. Какая группа стран является конкурентом России на мировом рынке угля:
У) Австралия, США;
С) Иран, Пакистан;
К) Южная Корея, Япония;
Т) Великобритания, Германия;
И) Бразилия, Египет?

9. За 2004 год цена барреля нефти на мировом рынке выросла на 50%, а за 2005 год – еще на 100%. Укажите, на сколько увеличилась стоимость одного барреля нефти за 2004–2005 годы:
И) 150%;
С) 200%;
З) 250%;
А) 300%;
О) 500%.

10. В 2004 году объемы добычи газа в Индонезии, Казахстане, Норвегии и России (млн $м^3$) соотносились как 240 : 80 : 160 : 200. В 2005 году добыча газа в каждой из этих стран увеличилась на 0,1 млрд $м^3$ в сутки. В какой из стран были достигнуты наибольшие темпы роста добычи газа:
Я) в Индонезии;
Ь) в Казахстане;
М) в Норвегии;
Й) в России;
Е) определить невозможно?

Отделение «Нравственность, право, закон»

Это – десятый набор на отделение.

Школьникам 8 – 11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагается годичный курс (первый год обучения) «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

Прошедшим этот курс предлагается дополнительный курс по граждановедению «Беседы об основах демократии».

Желающие поступить должны сообщить свой полный почтовый адрес, фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. При оценке вступительной работы мы учитываем возраст (базовое образование) поступающего. В письмо обязательно *вложите обычный конверт с маркой и вашим адресом* (чтобы мы могли вам ответить) и ответы на приведенный ниже тест.

Срок отправки работы – до 1 июня 2006 года.

Тест

Попробуйте найти ошибки (правовые и фактологические) в приведенном ниже тексте и объясните, в чем они заключаются.

Разговоры в застрявшем трамвае

– Ну вот, грузовик застрял на рельсах!

– Нельзя по путям ездить. Теперь никто за порядком не смотрит... В наше время...

– Да при первом генсеке его бы...

– Про кого это он? – тихонько интересуется молодой голос, – про Ленина?

– Наверное...

– Вот и суд рядом. Сейчас его за шиворот – и туда. Решение вынесут тройкой и лет на 10 в Соловки, – иронизирует кто-то.

Несколько человек уже вышли из трамвая. Но на улице дождь все сильнее. Попробовали зайти в здание суда. Однако охранник, куривший под козырьком подъезда, остановил: Сюда по повесткам вызывают. Идите, идите...

Зашлепали по лужам. А те, что остались в трамвае, продолжали философствовать.

Какой-то по виду клерк (галстук, тщательная стрижка) возмущается: буду требовать, чтобы компания вступилась, «пусть на шофера в суд подают: раз я опоздал, для компании ущерб и моральный вред».

«Мы все глядим в Наполеоны, Двуногих тварей миллионы, Для нас орудие одно», – ни с того ни с сего процитировал кто-то сзади.– Ну да, – проскрипела старушка, – небось, американец какой написал. Молодежь теперь других не знает.

– Убить этого водителя мало.

– Вот ты болтаешь и закон нарушаешь...

– Это я не закон нарушаю, а я это вслух мыслю.

– Вот за мысли тебя и привлекут. Больно уж они у тебя противные.

Отделение истории

Отделение истории объявляет набор на курс дистантного обучения.

Отделение истории – самое молодое, оно открылось в 1998 году. Ученикам исторического отделения регулярно направляются оригинальные учебные пособия и задания, подготовленные преподавателями специально для заочного образования. Обучение на историческом отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор и подготовиться к поступлению в вуз. Успешно прошедшие годовой курс обучения получают диплом Открытого лицея ВЗМШ при МГУ. Образование в лицее можно продолжить, занимаясь на спецкурсах.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, о чем думали, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и на что «напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете первыми!

Историческое образование в конверте – современная форма дополнительного образования. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и регулярно сообщать нам, что вы раскопали. Мы же подскажем вам, как действовать дальше. Ведь, в сущности, профессия историка и состоит из этих раскопок: историк-археолог копает землю и песок, отыскивая крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику, документы и превращает их в живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Как к нам поступить? Мы берем тех, кто выполнит вступительное задание.

Срок отправки работы – до 15 мая 2006 года.

Задание

1. Отгадайте кто это:

• Над его гробом воздвигнут храм.

• Ему посвящена икона Андрея Рублева «Троица» и картина Нестерова «Видение отроку Варфоломею».

• Сын бедного ростовского дворянина.

• В детстве имел необычный для 14 века интерес – страсть к грамоте.

• В 20 веке о нем бы сказали «не от мира сего, белая ворона».

• Возможная карьера для такого юноши в Древней Руси – книгочей в храме, переписчик книг, составитель летописного свода..., если бы не его подвижническая натура.

• В молодости – отшельник. В лесу на крутом холме поставил келью и уединился, дав обет молчания, иночества, безбрачия.

• Основатель и настоятель Троице-Сергиева монастыря.

• Любил молиться у иконы Троицы (образ Троицы в годы ига – символ единства Руси).

• Личным примером увлек массы русских людей на неосвоенные земли. Один из организаторов переселения в края, недоступные для ордынских набегов.

• Один за другим его ученики уходят в глухие места на пустоши и ставят монастыри – духовные и культурные центры Руси.

• Его ученики поставили 40 монастырей, ученики учеников – 60.

• Его последователи – Савва Сторожевский, Кирилл Белозерский и др.

• Примиритель князей, посол юного князя Дмитрия (будущего Донского) в Нижний Новгород.

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, политический портрет председателя первого советского правительства.

Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ

Федеральная заочная физико-техническая школа (ФЗФТШ) Федерального агентства по образованию при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2006/07 учебный год.

ФЗФТШ при МФТИ как государственное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 74 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее выпускник. Финансирует школу Федеральное агентство по образованию. Обучение для учащихся, проживающих в Российской Федерации, в рамках утвержденного плана приема – бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит высококвалифицированных специалистов по современным направлениям науки и техники. В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподавание в МФТИ ведут известные педагоги и ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель нашей школы – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать профессиональному самоопределению учащихся.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ФЗФТШ на 2006/07 учебный год проводится на следующие отделения:

– Заочное (индивидуальное обучение).

Тел./факс: (095) 408-51-45.

Прием на заочное отделение осуществляется на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8–11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ФЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 классов), а затем – рекомендуемые ФЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

– Очно-заочное (обучение в факультативных группах). Тел./факс: (095) 485-42-27.

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя преподавателями* – физики и математики, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ФЗФТШ.

Группа (не менее 8 человек) принимается в школу, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ФЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф. И. О. полностью, с указанием класса *текущего учебного года, итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике, домашнего адреса с индексом, телефона и e-mail), а также *телефон, факс и e-mail общеобразовательного учреждения*. Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ФЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать *до 25 июня 2006 года* по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., 9, ФЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлению ФЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), информацию о курсах повышения квалификации учителей физики и математики, проводимых ежегодно на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ФЗФТШ ими *высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.*

– Очное (обучение в вечерних консультационных пунктах).

Тел.: (095) 409-95-83.

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ФЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительного задания по физике и математике и собеседования, которое проходит во второй половине сентября.

Программы ФЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

Кроме занятий по этим программам, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2007», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в мартовские школьные каникулы, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах, турнирах и конференциях.

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ФЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадцатиклассники) получают свидетельства об окончании школы с итоговыми оценками по физике и математике, которые учитываются на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса в ФЗФТШ принимаются *победители областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2005/06 учебного года.* Им необходимо до 15 мая 2006 года выслать в ФЗФТШ выполненную вступительную работу по физике и математике вместе с копиями дипломов, подтверждающих участие в вышеперечисленных олимпиадах.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно выслать в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по следующему образцу:

Л. №								
№ задачи	1	2	3	…	16	17	18	Σ
Ф.								
М.								

1. Область	*Свердловская*
2. Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Роман Владимирович*
3. Класс, в котором учитесь	*седьмой*
4. Номер школы	*4*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета)	*обычная*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*624600 г.Барнаул, ул. Садовая, д.38, кв.6, e-mail: kusn@barn.ru*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*электрик*
мать	*учитель английского языка*
8. Адрес школы, телефон, факс, e-mail	*624600 г.Барнаул, ул. Фрунзе, д.42, e-mail:school4@barn.ru*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Еремин Владимир Петрович*
по математике	*Шилова Нина Игоревна*
10. Каким образом к вам попало это объявление?	

На конкурс ежегодно приходит более 4 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *два одинаковых* бандерольных конверта размером 160×230 мм с наклеенными марками номиналом на сумму 7 руб. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Ученикам, зачисленным в ФЗФТШ в рамках утвержденного плана приема, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма взноса будет составлять в год ориентировочно для учащихся заочного отделения 400–700 руб., для очного 500–1000 руб., для очно-заочного 800–1400 руб. (с каждой факультативной группы).

Срок отправления решения вступительного задания – *не позднее 1 марта 2006 года*. Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2006 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу:

141700 г.Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., 9, ФЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г.Киев, б-р Вернадского, д.36, ГСП, Киевский филиал ФЗФТШ при МФТИ. Телефон в Киеве: 424-30-25.

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ФЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный отбор будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по математике и физике.

В задании *по математике* задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3–8 – для восьмых классов, задачи 5–10 – для девятых классов, 7–13 для десятых классов.

В задании *по физике* задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 6–10 – для восьмых классов, задачи 5–7, 9–13 – для девятых классов, 12–18 – для десятых классов.

Номера классов указаны на текущий 2005/06 учебный год.

Вступительное задание по математике

1. Велосипедист проехал $\frac{5}{7}$ пути и еще 40 км; ему осталось проехать еще 0,75 пути без 118 км. Сколько всего должен проехать велосипедист?

2. Среди точек данной прямой l найдите такую, что сумма расстояний от нее до двух данных точек A и B является наименьшей.

3. Имеются 4 пакета с сахаром и весы с двумя чашками без гирь. С помощью пяти взвешиваний расположите пакеты по весу, если известно, что все пакеты разного веса.

4. Найдите цифры сотен и единиц числа $42*4*$, если известно, что оно делится на 72.

5. Определите, сколько килограммов сухарей с влажностью 15% можно получить из 255 кг хлеба с влажностью 45%.

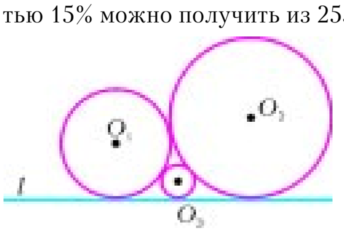


Рис. 1

6. Три окружности с центрами O_1, O_2, O_3, радиусами r_1, r_2, r_3 соответственно, касаются друг друга и прямой l, как показано на рисунке 1. Найдите r_3, если $r_1 = 1$, $r_2 = 4$.

7. Процент учеников некоторого класса, не повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 96,9% до 97,1%. Определите минимально возможное число учеников в таком классе.

8. Числа p и $2p+1$, где $p > 3$, являются простыми числами. Докажите, что число $4p + 1$ является составным.

9. Найдите все целые числа, каждое из которых является первым членом арифметической прогрессии с разностью, равной 7, и суммой первых нескольких членов, равной 2744.

10. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}\left(x - a\sqrt{y} - a\right)\left(x - \sqrt{y} - 3a\right) = 0,\\ x + \sqrt{y} + 2 = 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

11. Решите неравенство

$$\frac{7 - 3x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 3} \le -1 .$$

12. Биссектриса BK и высота CD остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность радиусом R с центром в точке O проходит через вершину B, середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке M такой, что $AM : MB = 2 : 1$. Найдите длину стороны AC.

13. Решите уравнение

$$\sin 3x - \left|\sin x\right| = \sin 2x .$$

Вступительное задание по физике

1 (экспериментальное задание). Определите скорость, с которой вода вытекает из носика водопроводного крана. Вы можете использовать линейку, часы или секундомер, емкость для воды.

2. Пункты A и B находятся выше и ниже по течению реки. Катер отплывает из A и, дойдя до пункта B, сразу разворачивается и возвращается в пункт A. Скорость течения реки равна $v_р$. Определите среднюю скорость катера за все время движения. Известно, что на путь из A в B катер затратил в 2 раза меньше времени, чем на обратный путь. Скорость катера относительно воды не изменяется.

3. Школьники изучают движение брусков разной массы по горизонтальной шероховатой поверхности стола. В первом опыте за легкую нить с постоянной скоростью тянут деревянный брусок массой m. При этом сила натяжения нити составляет 2Н. Во втором опыте на ту же поверхность устанавливают дополнительно второй брусок массой $2m$, изготовленный из того же материала, что и первый. Концы второй нити закрепляют на брусках и всю систему тянут с постоянной скоростью по столу за нить, привязанную к бруску меньшей массы (рис.2). Определите силы натяжения обеих нитей.

Рис. 2

4. В цилиндрическое ведро с вертикальными стенками и площадью дна $S = 500$ см^2 налита нефть, занимающая объем $V = 6{,}5$ л. Найдите давление нефти на стенку ведра на высоте $h = 3$ см от дна. Какую массу воды долили в ведро, если давление в том же месте увеличилось на 20%? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность нефти $\rho_н = 800$ кг/м^3. Атмосферное давление не учитывать.

5. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет цилиндры с поршнями, площади поперечного сечения которых равны 1000 см^2 и 500 см^2. В начальный момент поршни находятся на одном горизонтальном уровне. На поршень большей площади становится человек. При этом поршень опускается на 0,3 м. Какова масса человека? Массами поршней пренебречь.

6. Какую массу имеет деревянный кубик с ребром H, если при переносе его из масла в воду глубина погружения уменьшилась на l? Кубик плавает в каждой жидкости таким образом, что его верхняя грань параллельна поверхности жидкости. Плотности воды и масла равны $\rho_в$ и $\rho_м$ ($\rho_в > \rho_м$) соответственно.

7. Динамометр показывает, что шарик, подвешенный к нему на легкой нити, весит в воздухе $P_1 = 1{,}62$ Н. Когда шарик наполовину погрузили в воду, то динамометр стал показывать вес $P_2 = 1{,}12$ Н. Какова плотность материала шарика?

8. В электрическом чайнике мощностью $P = 1$ кВт можно нагреть до температуры $t = 100$ °С полтора литра воды, имеющей начальную температуру $t_0 = 2°$ °С, за $\tau = 15$ мин. Определите коэффициент полезного действия (КПД) чайника. Под КПД чайника следует понимать отношение полезного количества теплоты, т.е. теплоты, пошедшей на нагревание воды, к потребленной электроэнергии.

9. Кусок льда массой $m_л = 700$ г поместили в калориметр с водой. Масса воды $m_в = 2{,}5$ кг, начальная температура воды $t_в = 5$ °С. Когда установилось тепловое равновесие, оказалось, что масса льда увеличилась на $m = 64$ г. Определите начальную температуру льда. Потерями тепла и теплоемкостью калориметра пренебречь.

10. Найдите температуру вольфрамовой нити лампочки, если при включении в сеть с напряжением $U = 220$ В по нити идет ток $I = 0{,}68$ А. При температуре $t_1 = 2°$ °С сопротивление нити $R_1 = 36$ Ом. Зависимость сопротивления металлического проводника от температуры определяется выражением $R = R_0(1 + \alpha t)$, где t – температура проводника (в градусах Цельсия), α – температурный коэффициент сопротивления, R_0 – сопротивление проводника при температуре $t_0 = °$ °С. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ град$^{-1}$.

11. Из точки A вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с бросают камень. Точка B расположена над точкой A на одной вертикали с ней. При своем движении камень дважды пролетает точку B: при движении вверх в момент времени t_1 и при движении вниз в момент времени t_2 $(t_2 > t_1)$. Время отсчитывается от момента начала движения. Чему равно расстояние между точками A и B, если известно, что $t_2 = 2t_1$? Сопротивлением воздуха пренебречь.

12. Камень массой M лежит на горизонтальной поверхности на расстоянии L от края пропасти. К камню прикреплена легкая нерастяжимая веревка, перекинутая через гладкий выступ на краю пропасти. Вверх по веревке лезет обезьяна массой m. С каким постоянным ускорением (относительно земли) она должна двигаться, чтобы успеть подняться раньше, чем начнет падать камень? Начальное расстояние обезьяны от выступа равно $H\left(H < \dfrac{LM}{m}\right)$. Коэффициент трения камня о поверхность равен μ, причем $\mu M < m$.

13. Космический аппарат массой $M = 40$ кг движется по круговой орбите радиусом $R = 6800$ км вокруг Марса. В аппарат попадает и застревает в нем метеорит, летевший со скоростью $v = 50$ км/с перпендикулярно направлению движения аппарата. При какой массе метеорита отклонение в направлении движения аппарата не превысит угол $\alpha = 10^{-4}$ рад? Масса Марса $M_0 = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2).

14. Воздух можно приближенно считать смесью азота и кислорода. Определите, какая масса кислорода находится в объеме $V = 100$ м^3 воздуха при нормальных условиях. Молярную массу воздуха считать равной $M_в = 29$ г/моль.

15. Атмосфера Венеры почти полностью состоит из углекислого газа. Какой объем должен иметь исследовательский зонд массой $m = 1000$ кг, чтобы плавать в нижних слоях атмосферы Венеры? Температура углекислого газа у поверхности планеты $t = 500$ °С, давление $p = 100$ атм. Считать, что углекислый газ ведет себя в этих условиях, как идеальный газ.

16. В сосуде объемом $V = 1000$ л находятся вода и насыщенный водяной пар при температуре 100 °С. Общая масса пара и воды $M = 1$ кг. Определите массу воды в сосуде. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

17. В цилиндрическом сосуде с вертикальными стенками, закрытом сверху легко скользящим поршнем массой $M = 15$ кг и площадью сечения $S = 0{,}005$ м^2, находится объем $V = 3$ м^3 водорода H_2 при некоторой температуре. Атмосферное давление составляет $p = 10^5$ Па. Какое количество теплоты потребуется для того, чтобы втрое увеличить объем, занимаемый водородом?

18. Три одинаковых металлических маленьких шарика расположены на прямой в точках A, B и C (рис.3), причем

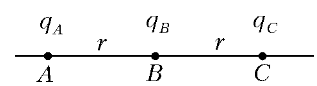


Рис. 3

$AB = BC = r$. Заряды шариков равны $q_A = q$, $q_B = -3q$ и $q_C = q$ соответственно ($q > 0$). Во сколько раз изменится величина силы, действующей на заряд q_C, если шарики с зарядами q_A и q_B привести в соприкосновение и вернуть их в точки A и B?

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно – СУНЦ) МГУ (школа имени академика А.Н. Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 классы (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 классы (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе. Первый тур экзаменов – заочный письменный экзамен по математике и по физике или химии. Успешно выдержавшие заочный экзамен в апреле – мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены. Однако *допускается участие в очном туре школьников, не участвовавших в заочном туре*.

Ниже приводятся условия задач *заочного* вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя, отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, телефон, электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес с индексом):

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (внимание: жители Москвы принимаются в школу без предоставления общежития, телефон Приемной комиссии: 445-11-08, сайт: http://www.pms.ru, e-mail: priem@pms.ru);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет).

Срок отправки работ – *не позднее 10 марта 2006 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи – не отчаивайтесь, Приемная комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Вступительные экзамены второго, *очного* тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая по регионам.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Найдите все трехзначные числа, которые в 17 раз больше суммы своих цифр.

2. Решите уравнение

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy .$$

3. В треугольнике ABC проведена высота AD. Из точки D опущены перпендикуляры DM и DN на прямые AB и AC. Найдите AD, если $MN = a$, а $\angle A = \alpha$.

4. Человек обычно приезжал на станцию одним и тем же поездом. К этому времени за ним приходила машина и отвозила его домой. Однажды он приехал на 1 час раньше, пошел пешком, встретил по дороге машину и вернулся домой на 20 минут раньше обычного. Сколько времени он шел пешком?

5. Можно ли отметить на плоскости 225 точек так, чтобы максимальное расстояние между ними было не больше 21, а минимальное – не меньше 3?

Для поступающих в 11 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$$

2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка P, а на стороне CD – точка Q. Отрезки AP и BQ пересекаются в точке M. Прямая DM пересекает BC в точке N. Найдите $\frac{BN}{NC}$, если $CP = 2BP$, $CQ=\frac{1}{3}QD$.

3. Пусть $\alpha > 1$ – корень уравнения $\alpha^3-\alpha-1=0$. Вычислите

$$\sqrt[3]{3\alpha^2-4\alpha}+\sqrt[3]{3\alpha^2+4\alpha+2} .$$

4. Найдите площадь выпуклого равностороннего пятиугольника $ABCDE$, если $AB = a$, $\angle BCD = 2\angle ACE$, $BE = b$.

5. См. задачу 5 для поступающих в 10 класс.

Физика

(физико-математическое отделение)

Для поступающих в 10 класс

1. Частица движется по оси x из начала координат с постоянным ускорением в течение промежутка времени τ. Начальная скорость равна нулю. Через промежуток времени τ ускорение изменяет знак на противоположный, и частица проходит начало координат со скоростью $v_{2x}=-u$. Найдите максимальное расстояние x_m, на которое частица сместилась от начала координат.

2. На высоте h частице придали горизонтально направленную начальную скорость v_0 . При отскоке от горизонтальной плоскости отношение величины вертикальной составляющей скорости после отскока к величине вертикальной составляющей скорости до отскока равно k. Найдите расстояние s от плоскости бросания до точки второго отскока.

3. Коробка массой m_1 с гладким дном, в которой находится груз массой m_2 , скользит по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите модуль F силы давления груза на переднюю стенку коробки.

4. Брусок, на который действует сила тяжести $F = 5$ Н, прижимают к стене силой $F_1 = 12$ Н , направленной горизонтально. Коэффициент трения между стенкой и бруском $\mu = 0,5$. Найдите величину R силы реакции, действующей на брусок со стороны стенки.

5. В глубоком аквариуме плавает цилиндр высотой H. Глубина погружения цилиндра $H' = 0,8\,H$. В аквариум доливают жидкость, всплывающую в воде. Когда слой жидкости доходит до торца цилиндра, толщина слоя на поверхности воды достигает значения $b = 0,5\,H$. Найдите плотность жидкости ρ .

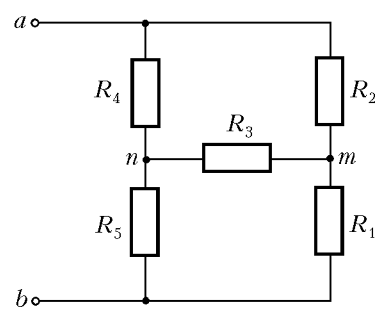
Для поступающих в 11 класс

1. На гладкой горизонтальной плоскости лежит частица массой m. На нее налетает частица массой m с кинетической энергий K. После неупругого нецентрального соударения величины скоростей частиц одинаковы, а угол между скоростями $\alpha=\pi/3$. Найдите приращение внутренней энергии частиц ΔU.

2. Одинаковые массы водорода и гелия находятся в сосуде объемом V_1 , который отделен от пустого сосуда объемом V_2 полупроницаемой перегородкой, пропускающей только молекулы водорода. После установления равновесия давление в первом сосуде уменьшилось в два раза. Найдите отношение V_2/V_1 .

3. В тепловой машине Карно, совершающей работу A', изотермическое расширение происходит при температуре T_2, а изотермическое сжатие – при температуре T_1. Найдите работу $A'_к$, совершаемую машиной при изменении температуры нагревателя $T_2 \to T_{2к}$ и холодильника $T_1 \to T_{1к}$.

4. На концах гладкой непроводящей трубки длиной $2s$ закреплены положительные заряды одинаковой величины Q. На расстоянии b $(b > s)$ от середины трубки помещают заряд $q > 0$ массой m. Начальная скорость заряда равна нулю. Найдите величину скорости этого заряда v_1 в момент прохождения заряда через середину трубки.



5. В схеме на рисунке сопротивления резисторов R_1, R_2, R_3 одинаковы. Разности потенциалов равны $\varphi_a-\varphi_b=U$, $U = 110$ В , $\varphi_a-\varphi_m=U_2$, $U_2 = 60$ В . Найдите напряжение $U_4=\varphi_a-\varphi_n$ на резисторе R_4 .

Химия

(химико-биологическое отделение)

1. Два грамма кальция сожгли в избытке кислорода, продукт сгорания поместили в воду и пропустили в полученную взвесь оксид серы (IV) до прекращения поглощения газа. Определите состав и массу образовавшейся соли. Какой объем оксида серы (IV) (при н.у.) может быть получен из данной соли при обработке ее серной кислотой?

2. В лаборатории есть смесь карбонатов стронция и бария. Как *химическим способом* определить массовую долю каждого из карбонатов в смеси, если есть широкий выбор химической посуды, весы, но из реактивов имеется только 20%-я соляная кислота? Опишите ход анализа и вычисления.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

(Начало см. на с. 41)

ние сопротивлений второго провода к первому:

1) 0,5; 2) 2; 3) 18?

12. Заряд 0,002 Кл движется в однородном магнитном поле со скоростью 50 м/с перпендикулярно вектору магнитной индукции, равной 40 Тл. Сила, действующая на заряд, равна:

1) 0,0016 Н; 2) 0,0025 Н; 3) 4 Н.

13. Предмет, расположенный перед плоским зеркалом, отодвинули от него на 4 см. Как изменилось расстояние между предметом и его изображением:

1) увеличилось на 4 см; 2) уменьшилось на 4 см; 3) увеличилось на 8 см?

14. Чему равна длина звуковой волны при частоте 200 Гц, если скорость распространения волны 340 м/с:

1) 0,59 м; 2) 1,7 м; 3) 68 км?

15. Произошла следующая ядерная реакция:

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{A}_{Z}\mathrm{Si}\,.$$

Чему равны зарядовое (Z) и массовое (A) числа кремния:

1) $Z = 14$, $A = 30$; 2) $Z = 16$, $A = 32$; 3) $Z = 12$, $A = 24$?

Часть 2. Решите задачи

16. Через какое время после вспышки человек услышит звук взрыва, произведенного на расстоянии 483 м, если ветер направлен в сторону взрыва? Скорость ветра 8 м/с, скорость звука 330 м/с.

17. Брус массой 200 кг движется по горизонтальному участку пути с ускорением 1 м/с^2 под действием силы 400 Н, направленной горизонтально. Определите коэффициент трения.

18. Какое количество теплоты необходимо для нагревания 0,1 кг воды от температуры 273 К до кипения и ее последующего полного испарения? Удельная теплоемкость воды $4200\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплота парообразования $2{,}1\cdot 10^6\ \text{Дж/кг}$.

19. Напряженность электрического поля плоского конденсатора $4\cdot 10^4$ В/м. Расстояние между обкладками конденсатора 0,005 м, заряд на обкладках 0,03 Кл. Чему равна емкость конденсатора?

20. Какую максимальную кинетическую энергию имеют вырванные из лития электроны при облучении светом с частотой 10^{15} Гц? Работа выхода электрона $3{,}8\cdot 10^{-19}$ Дж.

Публикацию подготовили
Е.Деза, С.Жданов, Б.Кукушкин, Е.Петрова

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. с.23)

1. На рисунке 1 представлена диаграмма распределения даты «1 января» по дням недели в зависимости от номера года. Здесь приводится цикл из $7\times 4 = 28$ лет, по прошествии которых ситуация повторяется, так что данную диаграмму можно продублировать влево и вправо на интервалы времени, кратные 28 годам, вплоть до 2099 года вперед и до 1901 года назад (годы 1900 и 2100 по григорианскому календарю високосными не являются).

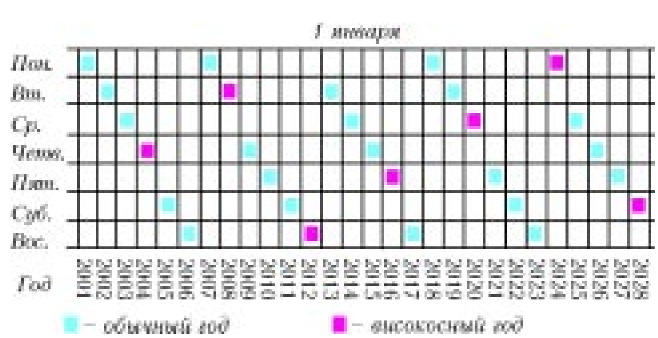


Рис. 1

Из этой диаграммы следует, что в 2006 году можно использовать календари, предназначенные для годов 1995, 1989, 1978 (ответ к задаче), а также 1967, 1961 и т.д.

Небезынтересный факт: существует всего 14 календарей таких, что *в любой год* григорианского летоисчисления одним из них можно пользоваться в течение всего года.

2. Выигрывает Снегурочка, стирая своим ходом одну букву О. В результате остается по одной букве С, Н, В, Ы, Г и Д, а также по паре букв О и М. Как видим, на доске имеется *четное* число отдельных букв (6) и *четное* число пар букв (2). Дед Мороз своим ходом непременно нарушит эту четность, но Снегурочка ответным ходом всегда может ее восстановить. В самом деле, если Дед Мороз стер одиночную букву, то Снегурочка стирает другую одиночную букву. Если Дед Мороз стер одну букву из пары, Снегурочка стирает одну букву из другой пары. Если же Дед Мороз стер целую пару букв, Снегурочка стирает другую пару букв – и снова четность восстановлена.

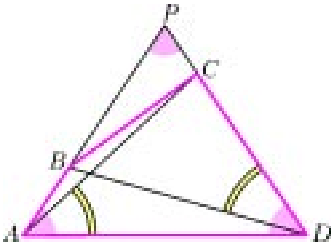


Рис. 2

Так как с каждым ходом число букв уменьшается, то игра когда-то закончится. А поскольку в результате получается четное число 0 отдельных букв и пар букв, то оно может возникнуть только после хода Снегурочки. Поэтому она и победит при любой игре Деда Мороза.

3. Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке P (рис.2). Треугольник APD – равносторонний. Отсюда $\Delta BPD = \Delta CDA$, $BP = CD$. Но $AB + BP = AP = AD$, поэтому $AB + CD = AD$.

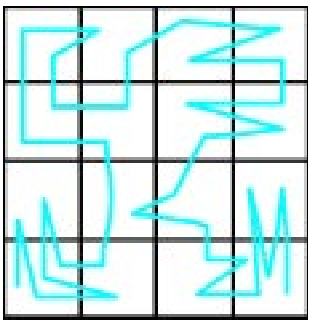


Рис. 3

4. Такой маршрут Человека Рассеянного с улицы Бассейной возможен (см., например, рис.3).

5. Инспектор может гарантированно определить фальшивомонетчика, задав 3 вопроса. Вначале, опросив любую группу из четырех человек, инспектор узнает, в этой или в другой группе находится преступник. (Группа, где имеется преступник, на вопрос инспектора отвечает «да», в противном случае – «нет».) Аналогично, второй вопрос позволяет из группы четырех подозреваемых выделить группу из двух подозреваемых, скажем М и Р. Третий вопрос инспектор задает группе из двух лиц Х и М, где Х находится вне подозрения (Х определяется по результатам предыдущих опросов). Ответ «да» на третий вопрос свидетельствует о том, что преступником является М, а ответ «нет» – что преступником является Р.

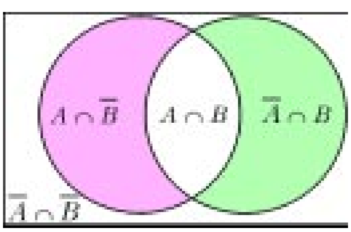


Рис. 4

Докажем, что за два вопроса инспектор не сможет гарантированно определить преступника. Пусть, задавая первый вопрос, инспектор выделяет подмножество A, а задавая второй вопрос – подмножество B из множества 8 подозреваемых. Тогда множество всех подозреваемых разбивается на четыре непересекающихся подмножества (рис.4):

$$A \cap B,\ A \cap \overline{B},\ \overline{A} \cap B,\ \overline{A} \cap \overline{B}.$$

В одном из этих подмножеств окажется не менее 2 человек, о которых нельзя сказать ничего определенного.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. 19\$. **2.** 14 шаров.

3. Не могут.

Предположим, что AH – высота, CG – медиана, BK – биссектриса треугольника ABC, причем отрезки AH, CG и BK, пересекаясь, образуют правильный треугольник DEF (рис.5). Поскольку $\angle EFD = 60° = \angle BFH$ и $AH \perp BC$, то $\angle FBC = \angle FBA = 30°$, $\angle ABC = 60°$. В треугольнике EGB $\angle BEG = 60°$, $\angle GBE = 30°$, потому $\angle EGB = 90°$, $CG \perp AB$. Так как CG – медиана и высота в треугольнике ABC, то треугольник ABC равнобедренный, $\angle A = \angle B = 60°$, но тогда $\angle C = 60°$, т.е. треугольник ABC правильный. Однако в правильном треугольнике все замечательные отрезки (медианы,

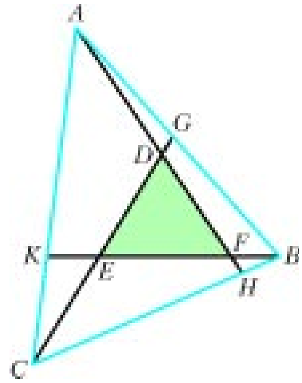


Рис. 5

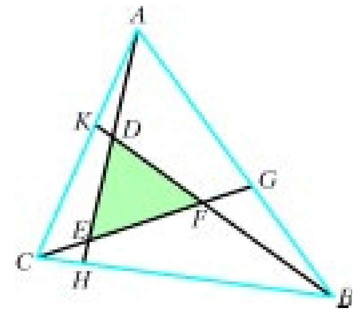


Рис. 6

они же биссектрисы, они же высоты) пересекаются в одной точке и не могут образовать равносторонний треугольник.

К такому же противоречию можно прийти и в том случае, если предположить, что высота AH, медиана CG и биссектриса BK образуют правильный треугольник DEF, показанный на рисунке 6 (сделайте это самостоятельно).

4. Ответ на первый вопрос: нельзя.

В самом деле, если из числа, содержащего по одному разу цифры от 1 до 9, вычеркнуть пятерку, то в числе не останется ни одной пятерки и ни одного нуля (нулей-то вообще не было). Поэтому это число не будет делиться на 5.

Ответ на второй вопрос: можно.

Укажем, как такое число найти. С учетом изложенного выше ясно, что число должно оканчиваться нулем. Это снимает проблемы с делимостью как на 5, так и на 2. Правда, чтобы число делилось на 4, надо, чтобы предпоследняя цифра была четная. Поэтому имеет смысл, чтобы число оканчивалось цифрами …20. В этом случае все будет в порядке и с делимостью на 4. А для делимости на 8 добавим еще и единицу. Итак, если число оканчивается цифрами …120, то все будет в порядке с делимостью на 2, 4, 5 и 8.

А теперь заметим, что сумма всех цифр числа равна 1 + 2 +… … + 9 = 45, и если из нее вычесть 3, то она будет делиться на 3, если же вычесть 9 – то на 9. Поэтому вопросы с делимостью на 3 и на 9 решены, по сути, автоматически – т.е. как бы ни были расставлены цифры, при вычеркивании тройки все равно получится число, делящееся на 3 (а при вычеркивании девятки – делящееся на 9). Поскольку же число, оканчивающееся цифрами …120, после вычеркивания шестерки останется четным и сумма цифр его, очевидно, будет делиться на 3, то и с делимостью на 6 тоже вопрос решен.

Что же осталось? Только семерка. Здесь уже ничего не придумаешь, кроме подбора. После нескольких попыток нетрудно выяснить, что, например, число 345689120 делится на 7, поэтому искомым может быть число 3456789120.

5. Поскольку $(m_1 - 1) + (m_2 - 2) + (m_3 - 3) + \ldots + (m_{100} - 100) = 0$, сумма положительных чисел набора $\{m_1 - 1,\ m_2 - 2,\ m_3 - 3,\ \ldots,\ m_{100} - 100\}$ равна сумме модулей отрицательных чисел. Располагая гирьки с первой суммой масс на одной чашке весов, а со второй суммой масс – на другой, получим равновесие.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Задача Сильвестра. Докажем эквивалентное утверждение: если n точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ плоскости не лежат на одной прямой, то существует прямая, проходящая в точности через две из этих точек.

Рассмотрим пары, состоящие из точек P_i и прямых P_jP_k, причем в каждой такой паре прямая P_jP_k не проходит через точку P_i. Так как указанных пар конечное количество, то

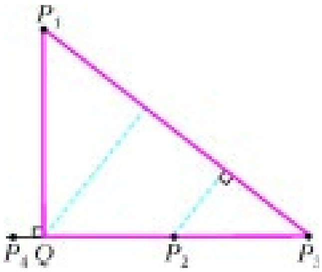


Рис. 7

должна существовать такая пара, скажем P_1, P_2P_3 (рис.7), для которой расстояние P_1Q от точки P_1 до прямой *наименьшее* (или одно из наименьших). Покажем, что прямая P_2P_3 не содержат других точек множества. Предположим противное: пусть эта прямая содержит также точку P_4. Тогда по крайней мере две из трех точек P_2, P_3, P_4 лежат по одну сторону от перпендикуляра P_1Q (или, возможно, одна из этих точек совпадает с точкой Q). Пусть точки обозначены таким образом, что эти две точки – P_2 и P_3, причем точка P_2 расположена ближе к точке Q, чем P_3 (или совпадает с Q). Тогда расстояние от точки P_2 до прямой P_3P_1 меньше чем P_1Q, что противоречит предположению минимальности расстояния P_1Q.

ЧИСЛА ПИЗО

1. Существует, и цифры эти – девятки при любых достаточно больших n.

2. Существует. Эти цифры – девятки, если n – четно, и нули, если n – нечетно.

3. *Указание*. Оцените число $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$.

5. У α^{2000} – девятки, у α^{2001} – нули.

7. *Указание.* Пусть $p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$, $q(x) = b_0x^l + b_1x^{l-1} + \ldots + b_l$. Допустим, что p – любое простое число. Достаточно доказать, что у многочлена $f(x) = p(x)\,q(x)$ найдется коэффициент, не делящийся на p. Пусть $a_0,\ldots,a_{s-1}$ делятся на p, а a_s – не делится. Аналогично, пусть b_t – не делится на p, а $b_{t+1},\ldots,b_l$ – делятся. Докажите, что коэффициент при x^{s+t} в многочлене $f(x)$ не делится на p.

8. Предел не существует.

ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1. $h' = h\dfrac{F}{2h-F} = 22$ см; $v' = v\dfrac{h'}{h} = 0{,}2$ см/с.

2. $l = 5F = 50$ см; $v = 10\omega F = 5$ см/с.

3. $F_2 = 12$ см. **4.** $D_{\min} = \dfrac{l-d_0}{ld_0} = 3{,}5$ дптр.

ИЩЕМ «ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ» ЭКСТРЕМУМ

1. 5. **2.** 5. **3.** 3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математика

Вариант 1

1. $(1;1)$, $\left(-\frac{1}{2};-2\right)$. *Указание.* Выполнив замену $u = \sqrt{2x-y}$, $v = xy$, получите из первого уравнения равенство $\left(1-\frac{u^2}{v}\right)\left(1-\frac{v}{u}\right) = 0$, т.е. либо $u = v$, либо $u^2 = v$.

2. $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(-\frac{5}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};3\right)$. *Указание.* Обозначим через a левую часть неравенства. Так как $4x^2-\frac{x}{4}+1-x^3 = \left(x^2+\frac{1}{4}\right)(4-x)$, то правая часть неравенства равна $\frac{\left(a^2+1\right)}{2}$ и неравенство приводится к виду $0 < \frac{(a-1)^2}{2}$, т.е. $a \ne 1$. Но тогда исходное неравенство эквивалентно совокупности неравенств

$$0 \le \log_{(4-x)}\left(x^2+\frac{1}{4}\right) < 1 \text{ и } \log_{(4-x)}\left(x^2+\frac{1}{4}\right) > 1.$$

3. $\arcsin\frac{24}{25}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Пусть $\alpha = \arcsin\frac{7}{25}$. Тогда $24\sin x+7\cos x = 25\sin(x+\alpha)\le 25$ для всех x, причем равенство возможно лишь при $x = \arcsin\frac{5}{13}+2\pi n$. Далее,

$$75+28\cos x-25\cos 2x =$$
$$= 100+28\cos x-50\cos^2 x \le 100+\frac{98}{25} = \frac{2598}{25}$$

для всех x, причем равенство возможно лишь при $\cos x = \frac{7}{25}$. Так как $75+28\cos x-25\cos 2x > 0$ при всех x, то исходное уравнение равносильно системе

$$24\sin x+7\cos x = 25 \text{ и } 75+28\cos x-25\cos 2x = \frac{2598}{25}.$$

4. $90°$; 16; $\frac{\sqrt{73}}{2}$. *Указание.* При гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $k = B_1C_1/BC$ треугольник ABC перейдет в треугольник AB_1C_1, окружность Ω перейдет в окружность ω_1, описанную около треугольника AB_1C_1 и касающуюся Ω в точке A. Окружность ω_2, симметричная ω_1 относительно прямой B_1C_1, проходит через точки B_1 и C_1 и касается Ω в точке A_1, симметричной A относительно B_1C_1. Следовательно, ω_2 совпадает с окружностью ω, а $A = K$. При этом отрезки AK и B_1C_1 перпендикулярны, а точка их пересечения делит AK пополам. Следовательно, высота H треугольника ABC, проведенная из вершины A, удовлетворяет соотношению $\frac{2H}{5} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{8}{5}$, т.е. $H = 4$. Отсюда $S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4 = 16$, $R = \sqrt{16+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$.

5. $a = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Указание.* Из условия следует, что система

$$\begin{cases} y = x^3, \\ x = |y|+a \end{cases}$$

должна иметь единственное решение. Это возможно лишь в случае касания прямой $y = x-a_0$ и графика функции $y = x^3$ в некоторой точке $x_0 > 0$. Условия касания запишутся в виде $x_0^3 = x_0-a_0$ и $3x_0^2 = 1$. Отсюда $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

6. 1; $2\arcsin\sqrt{\frac{13}{22}}$; $\frac{\sqrt{65}}{4}$. Так как $OB = OD$, то прямая BD параллельна плоскости основания конуса. Продолжим OD до пересечения с окружностью основания конуса в точке D'. Из подобия треугольников OAD' и OBD получаем $AD' = 2BD = 2\sqrt{2} = AC$. Следовательно, треугольник ACD' равнобедренный, $\sin\angle ACD' = \frac{AD'}{2r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\angle CAD' = 1$. Так как $\angle CAD'$ – угол между скрещивающимися ребрами AC и BD, то объем пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{6}\cdot AC\cdot BD\cdot\frac{h}{2}\cdot\sin\angle CAD' = 1.$$

Опустим перпендикуляры из C и D' на OA. Из симметрии относительно биссекторной плоскости двугранного угла при AB получаем, что эти перпендикуляры пересекутся в точке $P \in OA$. Искомый двугранный угол при ребре AB обозначим $\alpha = \angle CPD'$. Находим $\cos\angle OAC = \frac{AC}{2OA} = \sqrt{\frac{2}{13}}$,

$CP = AC \cdot \sin\angle OAC = 2\sqrt{\frac{22}{13}}$, $CD' = 2r = 4$. Тогда

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{CD'}{2CP} = \sqrt{\frac{13}{22}}$. Отсюда $\alpha = 2\arcsin\sqrt{\frac{13}{22}} = \arccos\left(-\frac{2}{11}\right)$.

Пусть O' – проекция O на плоскость основания конуса. Рассмотрим две плоскости: одна перпендикулярна AC и проходит через середину AC, другая перпендикулярна BD и проходит через середину BD. Центр S описанной около $ABCD$ сферы принадлежит пересечению этих плоскостей, т.е. прямой OO'. Пусть T – середина AB. Тогда $TS \perp AB$ и $\frac{OT}{OS} = \frac{OO'}{OA}$.

Отсюда

$$OS = \frac{OA \cdot OT}{OO'} = \frac{OA(OA+OB)}{2OO'} = \frac{\sqrt{13}\left(\sqrt{13}+\sqrt{13}/2\right)}{6} = \frac{13}{4},$$

$$SO' = |OO' - OS| = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, радиус сферы

$$R = AS = \sqrt{AO'^2 + SO'^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}.$$

Вариант 2

1. $\left(\pm\sqrt{2}; 1\right)$. *Указание.* Получите из системы, что $2y^2 = x^2$, тогда $8y - 6y^2 = \frac{2}{y^2}$, т.е. $4 - 3y - \frac{1}{y^3} = 0$, а затем решите полученное уравнение.

2. $\pm\arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Преобразуйте левую часть уравнения к виду $\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\cos x\cos 2x}$. Следовательно, $\frac{\cos x - \cos 2x}{2\cos x\cos 2x} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2\cos 2x}$, т.е. $\cos x - 2\cos^2 x + 1 = \left(1+2\sqrt{2}\right)\cos x$.

3. $\left(\frac{1}{16}; \frac{9}{16}\right] \cup \left[1; \frac{51+5\sqrt{77}}{32}\right]$. *Указание.* При $x \in \left[0; \frac{1}{16}\right)$ решений нет. При $x > \frac{1}{16}$ неравенство равносильно двойному неравенству $0 \le \frac{\sqrt{x} - \frac{3}{4}}{x - \frac{55}{64}} \le \frac{1}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)^2}$.

4. 10; $7\sqrt{2}$. Пусть точка O_1 – центр окружности, описанной около ΔABD, точка O_2 – центр окружности, описанной около ΔABC, O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к AB. Пусть H – середина AB. Если O_1 и O_2 лежит по разные стороны от прямой AB, то $HO_1 + HO_2 = 10$ и $29 - HO_1^2 = 169 - HO_2^2$. Следовательно, $HO_2 - HO_1 = 14$, т.е. $HO_1 < 0$, что невозможно. Таким образом, O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB. Тогда $\angle BO_2H = \angle ACB = \angle CAD = \alpha$, $\angle BO_1H = \angle BDA = \angle DBC = \beta$. Так как $13 > \sqrt{29}$, то O_1 лежит на отрезке HO_2. Из ΔBO_1O_2 по теореме косинусов находим $\cos\alpha = (100+169-29)/(20\cdot 13) = 12/13$, $\sin\alpha = 5/13$. Тогда $AB = 2BH = 2\cdot 13\cdot\sin\alpha = 10$. Из ΔHO_1B находим $\sin\beta = 5/\sqrt{29}$, $\cos\beta = 2/\sqrt{29}$. Рассмотрим ΔAOD. Пусть M – середина AD. Тогда OM – медиана ΔAOD, $OM = BH = 5$. Пусть $AD = d$, $\angle AOD = \gamma$. Так как $\angle OAD = \alpha$, $\angle ODA = \beta$, то $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \frac{70}{13\sqrt{29}}$. Тогда по теореме синусов из ΔAOD находим $AO = AD\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{13}{14}d$, $OD = AD\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{29}}{14}d$. По свойству медианы OM треугольника AOD получаем

$$OM = \sqrt{\frac{1}{2}AO^2 + \frac{1}{2}OD^2 - \frac{1}{4}AD^2} = \frac{5d\sqrt{2}}{14} = 5, \text{ откуда } d = 7\sqrt{2}.$$

5. $\left(\frac{8}{3-\sqrt{5}}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Пусть $a = 4^{\sqrt{x+4y}}$, $b = \sqrt{\frac{y\sqrt{x}}{2} + 1}$, $c = 3^{-\sqrt{x-4y-4\sqrt{x}}}$. Тогда $a + b = a^c$. Так как $a > 1$, $b \ge 0$, $c \le 1$, то $a \le a + b = a^c \le a$. Следовательно, $a = a + b = a^c$, т.е. $b = 0$, $c = 1$. Получаем $y\sqrt{x} = -2$, $x - 4y = 4\sqrt{x}$, а также $x + 4y > 0$ (из условия $a > 1$). Имеем $4/y^2 - 4y = -8/y$, т.е. $y^3 - 2y - 1 = 0$. Отсюда либо $y = -1$, либо $y^2 - y - 1 = 0$, т.е. $y = \left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$. При $y = -1$ находим $x = 4$, т.е. $x + 4y > 0$ не выполняется. В силу $y\sqrt{x} = -2$ получаем $y < 0$, т.е. $y = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$, $x = 16/\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 8/\left(3-\sqrt{5}\right)$. При этом $x + 4y > 0$.

6. 17; $\frac{90}{7}$; $4\sqrt{\frac{10}{3}}$; $2\arcsin\sqrt{\frac{123}{138}}$.

Пусть O – центр сферы, O_1 – его проекция на $ABCD$, тогда O_1 – центр вписанной в $ABCD$ окружности. Прямая SO перпендикулярна плоскости, в которой лежат основания касательных, проведенных из S к сфере, т.е. $SO \perp ABCD$. Поэтому SO_1 – высота пирамиды. Тогда, обозначив через K, L, M, N точки касания сферы с AB, BC, CD, DA, получаем, что SK при проекции на $ABCD$ переходит в O_1K, и по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp AB$. Таким образом, касательные из точки S есть высоты боковых граней. По формуле Герона площадь треугольника SAB равна $\sqrt{12\cdot 3\cdot 3\cdot 6} = 18\sqrt{2}$, $SK = 4\sqrt{2}$, радиус вписанной в $ABCD$ окружности равен $r_1 = \sqrt{SK^2 - h^2} = 2\sqrt{5}$. Далее, треугольник SKO – прямоугольный с высотой KO_1, поэтому $OK/SK = O_1K/SO_1$, откуда $R = OK = r_1\cdot SK/h = 4\sqrt{10/3}$.

Теперь имеем $AK = AN = \sqrt{SA^2 - SK^2} = 2$, $BK = BL = \sqrt{SB^2 - SK^2} = 7$, $CL = CM = \sqrt{SC^2 - SL^2} = 10$. Заметим, что $\operatorname{tg}\angle O_1AK = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\angle O_1CL = 1/\sqrt{5}$, поэтому $\angle O_1CL + \angle O_1AK = \pi/2 = (\angle BCD + \angle BAD)/2$. Тогда $\angle O_1BL + \angle O_1DM$ также равно $\pi/2$, а значит, $DM = r_1\operatorname{ctg}\angle O_1DM = r_1^2/BK = 20/7$. Таким образом, $BC = 7 + 10 + 17$, $CD = 10 + 20/7 = 90/7$.

Наконец, заметим, что в равных прямоугольных треугольника SMD и SND высоты из вершин M и N падают в одну точку P. Следовательно, искомый двугранный угол при ребре SD равен $\angle NPM$. Так как $SD = \sqrt{SM^2 + DM^2} = \sqrt{1968/49}$, $NP = ND\cdot SN/SD = 20\sqrt{2/123}$, а $MN/2 = DN\cdot\sin\angle O_1DM = 20/\sqrt{69}$, то $\angle NPM = 2\arcsin(MN/2NP) = 2\arcsin\sqrt{123/138}$.

Вариант 3

1. $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{41}}{2}\right]$. **2.** $\frac{\pi}{12}(6n\pm 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. 2; $\frac{3\sqrt{6}}{5}$; $\frac{4}{5}\sqrt{\frac{17}{5}}$; $2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Пусть $2\alpha = \angle ACB$. Так как $CD = \frac{2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\alpha}{AC+BC} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos\alpha}{6} = \sqrt{6}$, то $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{6}}{8}$, $\cos 2\alpha = \frac{27}{16} - 1 = \frac{11}{16}$. По теореме косинусов из ΔABC находим $AB = \sqrt{4+16-11} = 3$. По свойству биссектрисы CD имеем $\frac{BD}{3-BD} = \frac{4}{2}$, т.е. $BD = 2$. По свойству биссектрисы AE имеем $\frac{CE}{4-CE} = \frac{2}{3}$, т.е. $CE = \frac{8}{5}$. По теореме косинусов из ΔAEC находим $AE = \sqrt{\frac{64}{25} + 4 - 2\cdot 2\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{11}{16}} = \frac{3\sqrt{6}}{5}$. По теореме косинусов из ΔCDE находим $DE = \sqrt{\frac{64}{25} + 6 - 2\cdot\frac{8}{5}\sqrt{6}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{8}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$. Тогда искомый радиус $R = \frac{DE}{2\sin\alpha} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{17}{5}}$. Пусть O_1 – центр окружности, вписанной в ΔABC, а O_2 – центр окружности, описанной около ΔABC. Пусть M – проекция O_1 на AC, а N – проекция O_2 на AC. Так как $O_1 = AE \cap CD$, то CO_1 – биссектриса в ΔCAE. Следовательно, $CO_1 = \frac{2\cdot CE\cdot AC\cdot\cos\alpha}{CE+AC} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Тогда $CM = CO_1\cos\alpha = \frac{3}{2}$. Так как N середина AC, то $CN = 1$, $MN = \frac{1}{2}$. Далее, $MO_1 = CO_1\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{6}$. Радиус окружности, описанной около ΔABC, равен $CO_2 = \frac{AB}{2}\sin 2\alpha = \frac{8}{\sqrt{15}}$. Тогда по теореме Пифагора из ΔNO_2C находим $NO_2 = \sqrt{CO_2^2 - CN^2} = \frac{7}{\sqrt{15}}$. Следовательно, искомое расстояние $O_1O_2 = \sqrt{MN^2 + (NO_2 - MO_1)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

4. 1) $\arccos\frac{3}{5}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{7\sqrt{39}}{50}$; 4) $\frac{7\sqrt{39}}{156}$. Пусть $AB = a = 4$, $BD = b$, $\angle ABD = \beta$. По теореме косинусов из ΔACD имеем $16 = 2b^2\left(1 - \frac{7}{25}\right) = \frac{36}{25}b^2$, т.е. $b = \frac{10}{3}$, $\cos\beta = \frac{a}{2b} = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Так как AC и A_1C_1 параллельны, то искомый угол между прямыми AC и B_1C_1 равен $\angle B_1C_1A_1 = \varphi$. Получаем $BB_1 = a\cos\beta = \frac{12}{5}$, $DB_1 = b - BB_1 = \frac{14}{15}$, $A_1D = \frac{5}{3}$, по теореме косинусов из ΔB_1A_1D находим $B_1A_1 = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{196}{225} + 2\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{14}{15}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)} = \frac{5}{3}$. Таким образом, $B_1A_1 = \frac{5}{3} = B_1C_1 = \frac{b}{2}$, $A_1C_1 = \frac{a}{2}$, т.е. треугольники ACD и $A_1C_1B_1$ подобны. Следовательно, $\varphi = \beta = \arccos\frac{3}{5}$, площадь $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{3}$. Так как $AA_1 = DA_1$, то расстояния от точек A и D до плоскости $A_1B_1C_1$ совпадают. Пусть E – середина AC, $E_1 = (DE)\cap(A_1C_1)$, DD_1 – высота в ΔDE_1B_1. Длина DD_1 – искомое расстояние. Имеем

$$DE = \sqrt{\frac{100}{9} - 4} = \frac{8}{3},\quad B_1E_1 = DE_1 = \frac{DE}{2} = \frac{4}{3},$$

$$\cos\angle E_1B_1D = \frac{DB_1}{2B_1E_1} = \frac{7}{20},\quad DD_1 = DB_1\sin\angle E_1B_1D = \frac{7\sqrt{39}}{50}.$$

Обозначим $S_1 = S_{A_1B_1C_1} = S_{A_1C_1D} = \frac{4}{3}$, $S_2 = S_{A_1DB_1} = S_{B_1C_1D}$, $V_1 = V_{A_1B_1C_1D}$. Тогда искомый радиус вписанного в $A_1B_1C_1D$ шара равен $R = \frac{3V_1}{2(S_1+S_2)}$. Получаем

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{15}\cdot\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{49}{225}} = \frac{56}{75},\quad V_1 = \frac{1}{3}\cdot S_1\cdot DD_1 = \frac{14\sqrt{39}}{225},$$

$$2S_1 + 2S_2 = \frac{104}{25},\quad R = \frac{7\sqrt{39}}{156}.$$

5. $a = 2$. *Указание.* Так как множество решений первого неравенства представляет собой круг, а множество решений второго неравенства внутренность параболы, достаточно найти значения a, при которых концы отрезка удовлетворяют как первому, так и второму неравенствам, т.е. a удовлетворяет системе

$$\begin{cases}(1-a)^2 + 1 \le 3,\\ (1-a)^2 + 2 \le 3,\\ 1 - a \le 0,\\ 1 - a + 1 \le 0.\end{cases}$$

6. $\left(\frac{15}{7}, \frac{21}{5}, \frac{35}{3}\right)$. Складывая уравнения системы попарно, получаем

$$\begin{cases}\frac{xy}{9} = 1 + \ln\frac{xy}{9},\\ \frac{yz}{49} = 1 + \ln\frac{yz}{49},\\ \frac{xz}{25} = 1 + \ln\frac{xz}{25}.\end{cases}$$

Уравнение $t = 1 + \ln t$ имеет единственное решение $t = 1$. Действительно, функция $f(t) = t - 1 - \ln t$ строго убывает при $t\in(0;\,1)$, так как $f'(t) = 1 - \frac{1}{t} < 0$ при $t\in(0;\,1)$, и строго возрастает при $t > 1$, так как $f'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0$ при $t > 1$. Таким образом, $0 = f(1) < f(t)$ для всех положительных $t \ne 1$. Следовательно, $xy = 9$, $yz = 49$, $xz = 25$. Перемножив полученные три последних равенства, находим $xyz = 105$. Следовательно, $x = \frac{xyz}{yz} = \frac{15}{7}$, $y = \frac{xyz}{xz} = \frac{21}{5}$, $z = \frac{xyz}{xy} = \frac{35}{3}$.

Физика

Вариант 1

1. Во время движения колеса по поверхности клина клин остается неподвижным. Поэтому проекция на горизонтальную ось всех действующих на клин сил равна нулю (рис.8):

$$F + F_{тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = 0.$$

Здесь $F_{тр}$ – сила трения покоя между колесом и поверхностью клина, $N = Mg\cos\alpha$ – сила нормального давления колеса на клин, равная силе реакции опоры. Сила трения покоя – величина неизвестная, но ее можно найти из предыдущего уравнения:

$$F_{тр} = Mg\sin\alpha - \frac{F}{\cos\alpha}.$$

Теперь запишем уравнение движения центра масс колеса вдоль наклонной плоскости клина:

$$Ma = Mg\sin\alpha - F_{тр},$$

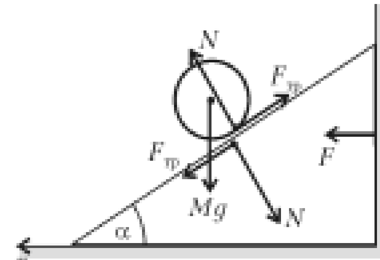


Рис. 8

откуда найдем ускорение колеса:

$$a = g\sin\alpha - \frac{F_{\text{тр}}}{M} = \frac{F}{M\cos\alpha}.$$

При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью связь между пройденным путем s и скоростью v, достигнутой в конце пути, имеет вид $v = \sqrt{2as}$, или

$$v = \sqrt{\frac{2Fs}{M\cos\alpha}}.$$

2. В исходном состоянии имеется ненасыщенный водяной пар, который будем рассматривать как идеальный газ. Запишем уравнение состояния данного газа:

$$pV_1 = \frac{m_1}{\mathrm{M}}RT_1,$$

где p – давление, V_1 – объем, m_1 – масса, T – температура пара. В конечном состоянии мы имеем равновесное двухфазное состояние – вода и насыщенный водяной пар – при температуре $T_2 = 373$ К и том же давлении p. Насыщенный водяной пар также будем считать идеальным газом и запишем его уравнение состояния:

$$pV_2 = \frac{m_2}{\mathrm{M}}RT_2,$$

где V_2 – объем и m_2 – масса пара в новом состоянии. Масса образовавшейся воды равна

$$m = \rho\alpha V_2.$$

Закон сохранения количества вещества (H_2O) в цилиндре под поршнем позволяет записать

$$m_1 = m_2 + m, \text{ или } \frac{pV_1\mathrm{M}}{RT_1} = \frac{pV_1\mathrm{M}}{kRT_2} + \rho\alpha\frac{V_1}{k}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{1 + \frac{\rho\alpha RT_2}{\mathrm{M}p}} = 2.$$

3. Предположим, что диод открыт и через него течет некоторый ток I. Напряжение на диоде в этом случае равно нулю.

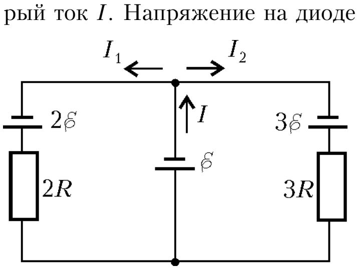


Рис. 9

Соответствующая схема будет иметь вид, изображенный на рисунке 9. Из закона сохранения заряда следует

$$I = I_1 + I_2.$$

Запишем закон Ома для левого контура:

$$2\mathscr{E} - \mathscr{E} = I_1 \cdot 2R$$

и для правого контура:

$$3\mathscr{E} - \mathscr{E} = I_2 \cdot 3R.$$

Выразим отсюда токи I_1 и I_2:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{2R}, \quad I_2 = \frac{2\mathscr{E}}{3R}$$

и найдем ток через диод:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{7}{6}\frac{\mathscr{E}}{R}.$$

Поскольку мы получили, что $I > 0$, наше предположение верно – через диод течет ток $I = \frac{7}{6}\frac{\mathscr{E}}{R}$, а напряжение на диоде равно нулю.

4. Рассмотрим произвольный момент времени t в процессе убывания магнитного поля. Обозначим суммарный магнитный поток через обе катушки через $\Phi(t)$. Закон Ома для колебательного контура будет иметь вид

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = U_0.$$

Поскольку время убывания магнитного поля мало, можно считать, что

$$\Delta\Phi(t) = 0.$$

А это означает сохранение магнитного потока за время τ выключения магнитного поля:

$$\Phi(\tau) = \Phi(0).$$

Пусть сразу после выключения поля в контуре течет ток I_0. Тогда последнее соотношение можно записать в виде

$$(L_1 + L_2)I_0 = B_0SN.$$

Итак, мы имеем такие начальные условия в контуре сразу после выключения поля: ток в контуре равен

$$I_0 = \frac{B_0SN}{L_1 + L_2},$$

а напряжение на конденсаторе равно U_0 (рис.10). Направление тока I_0 зависит от направления индукции магнитного поля.

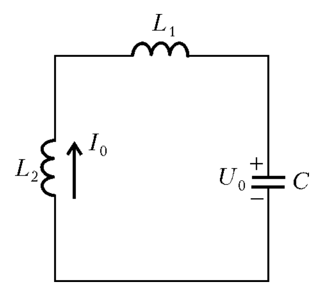


Рис. 10

В те моменты, когда ток в контуре достигает максимального значения I_m, напряжение на конденсаторе равно нулю. Пусть это будет вторым состоянием контура. Тогда по закону сохранения энергии можно записать

$$\frac{(L_1 + L_2)I_0^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2)I_m^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$I_m = I_0\sqrt{1 + \frac{CU_0^2}{I_0^2(L_1 + L_2)}} = \frac{B_0SN}{L_1 + L_2}\sqrt{1 + \frac{C(L_1 + L_2)U_0^2}{(BSN)^2}}.$$

5. Ход лазерного луча в отсутствие стеклянной пластинки и при ее наличии изображен на рисунке 11. При построении используется свойство параллельных лучей: при падении на рассеивающую линзу на выходе из нее эти лучи расходятся, а их продолжения (в обратную сторону) собираются в точке, принадлежащей фокальной плоскости линзы. В нашем случае это точка B. Она находится с помощью построения прямой BO, параллельной падающему лучу лазера и проходящей через оптический центр линзы.

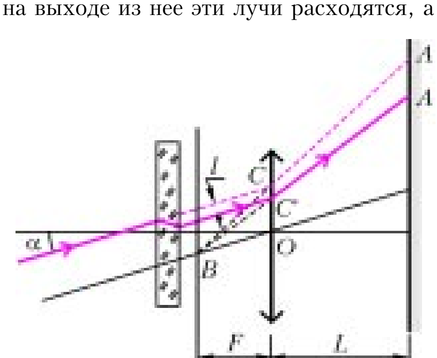


Рис. 11

При падении луча на плоскопараллельную пластинку под малым углом α выходящий из пластинки луч распространяется параллельно падающему лучу со смещением

$$l = \alpha d\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

где n – искомый показатель преломления пластинки. На рисунке 11 светящаяся точка A на экране соответствует лазерному лучу без пластинки, а точка A' принадлежит этому лучу при наличии пластинки. Расстояние между точками A и A'

по условию равно a, а расстояние между точками C и C' составляет

$$CC' = \frac{l}{\cos\alpha} \approx l\,.$$

Из подобия треугольников ABA' и CBC' следует (с учетом малости угла α)

$$\frac{a}{CC'} = \frac{L+F}{F}\,, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\alpha d\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{L+F}{F}\,.$$

Отсюда получаем

$$n = \frac{1}{1-\dfrac{aF}{\alpha d(L+F)}} \approx 1{,}6\,.$$

Вариант 2

1. $\mu_{\min} = \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{kA}{4mg\cos\alpha}$.

2. Уровень воды понизится на $\Delta h = \dfrac{T}{\rho g S} = 2{,}5$ мм.

3. $A = \dfrac{\eta A_T}{1-\eta}$.

4. $U_L = \dfrac{R}{R+r_1}\left(\mathcal{E}_1 - \dfrac{Rr_1q_0}{L}\right)$; $\Delta q = \dfrac{L}{R}\left(\dfrac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \dfrac{\mathcal{E}_2}{r_2} - \dfrac{Rq_0}{L}\right)$.

5. $\lambda = \dfrac{hc}{A+eU_з} = 0{,}22$ мкм.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

Математика

Вариант 1

1. $[-2;\,-1)\cup[3;\,+\infty)$. **2.** -4. **3.** $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

4. 2; $-15\pm\sqrt{161}$. **5.** $4\sqrt5$. **6.** $\dfrac{243}{8}$.

7. $2\pi n$, $-\dfrac{\pi}{12}+2\pi n$, $-\dfrac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **8.** $\dfrac{13}{8}$.

9. $a\in\left[0;\,\dfrac45\right)\cup\{2\}$. *Указание.* Постройте график функции $\dfrac{2x}{x^2+1}+\sqrt{2x-x^2}$ и выясните, когда прямая $y = a$ пересекает график только в одной точке.

Вариант 2

1. $\left(-\infty;\,-\dfrac73\right)$. **2.** $(-3;\,-2]\cup[2;\,+\infty)$. **3.** 5; -3.

4. $(7;\,-3)$, $(-3;\,-1)$. **5.** 10. **6.** 1.

7. $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

8. $2\operatorname{arctg}\dfrac12$. *Указание.* Сечение – трапеция с основаниями 16 и $16(1-\operatorname{ctg}\alpha)$ и высотой $\dfrac{6}{\sin\alpha}$. Из уравнения $\dfrac{16+16(1-\operatorname{ctg}\alpha)}{2}\dfrac{6}{\sin\alpha} = 75$ получаем $25\sin^2\alpha+16\cos\alpha-{}$ $-32\sin\alpha = 0$. Переходя к $t = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ ($t\in(0;1)$), получаем уравнение $4t^4+16t^3-25t^2+16t-4=0$, имеющее рациональный корень $t=\dfrac12$. После деления на $t-\dfrac12$ имеем $f(t)=2t^3+9t^2-8t+4=0$. Но $f(t)>9t^2-8t+4>0$ при $t>0$.

9. $a\in\{-2\}\cup\left\{-\sqrt3\right\}\cup\left[1;\,\sqrt3\right)$.

Физика

Вариант 1

1. $Q_х = 400$ Дж.

2. Изменение импульса направлено вертикально и равно $\Delta p = m\sqrt{2gh}\approx 3{,}4$ кг·м/с.

3. См. рис.12.

4. $T = IBR = 2{,}25$ мН; ток течет по часовой стрелке.

5. $r = \dfrac{\mathcal{E}^2\eta(1-\eta)}{P}\approx 10$ Ом.

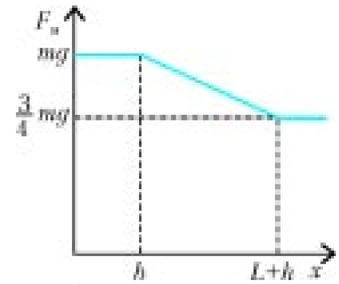


Рис. 12

Вариант 2

1. $Q = (C_1+C_2)U = 120$ мкКл.

2. $d = \dfrac{fF}{f-F} = 20$ см, $H = h\dfrac{f}{d} = h = 12$ см.

3. $v_{ср} = \dfrac{2A\omega}{\pi}\approx 0{,}32$ м/с. **4.** $\Delta p = \dfrac{eEl}{v_0} = 1{,}6\cdot10^{-23}$ кг·м/с.

5. $A = \dfrac{3R\Delta T}{2(1-\eta)}$.

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 92,5. **2.** $(-1)^{n+1}\cdot\dfrac23+4n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

3. $(-\infty;\,-5]\cup\left[-\dfrac15;\,0\right)\cup\left(0;\,\dfrac15\right]\cup[5;\,+\infty)$. **4.** 75%.

5. $7\dfrac{1}{64}$. *Указание.* Данная функция строго убывает.

6. $-30\le a\le 0$. *Указание.* Квадратичная функция $f'(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{R}$ должна быть неположительной: $f'(x)\le 0$.

7. 10π; 90π. *Указание.* Пусть A – точка пересечения отрезков OK и BC. Воспользуйтесь подобием треугольников ABO и AKB.

8. $\dfrac{10}{7}$. Построение приведено на рисунке 13, где $B_1S =$ $= CP = CC_1$. *Указание.* Так как $C_1P\parallel A_1D$, то плоскость сечения PSK параллельна диагонали A_1D. Объем тела $CBKNC_1B_1M$ можно вычислить как $V_{SPBK}-V_{SC_1B_1M}-$ $-V_{C_1PCN}$.

Замечание. Искомой плоскости сечения, параллельной диагонали AD_1, не существует.

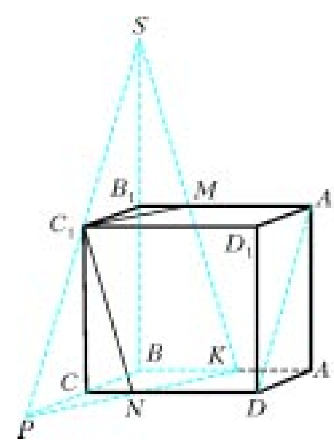


Рис. 13

Вариант 2

1. 100. **2.** 2. **3.** $\left(0;\,\dfrac15\right)\cup\left(1;\,5\sqrt5\right)$.

4. $\dfrac{(2n+1)\pi}{6}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Заметьте, что все решения уравнения можно записать в виде одной серии.

5. $(-5;\,1)\cup(1;\,6)$. *Указание.* Заметив, что $x = 1$ не является решением системы, сократите первое уравнение на $|x-1|>0$. Второе неравенство равносильно условию $x+5>0$.

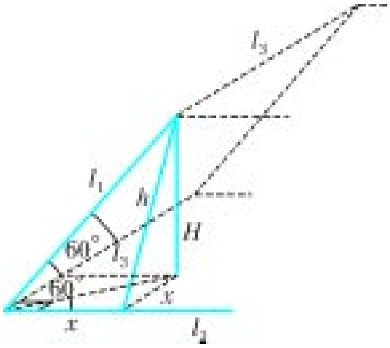


Рис. 14

6. $y' = -78x^{-79} - 32x^{15}$.
7. Промежуток возрастания: $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$, убывания: $\left[-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.
8. $210\sqrt{2}$. *Указание.* Расположите параллелепипед так, чтобы в основании был прямоугольник. Обозначив l_2, l_3 – стороны основания (рис.14), H – высоту пирамиды, h – высоту боковой грани, заметьте, что $h = l_1\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{1}{2}l_1$, и найдите H по теореме Пифагора.

Вариант 3

1. $-\frac{3}{2}$. **2.** $[-4; 0] \cup [1; 5]$. **3.** $(-2; 0) \cup (2; 4)$.
4. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* После упрощений рассмотрите два случая: $\cos x = 0$ и $\cos x \neq 0$.
5. -2.
6. $y' = (3 - x)e^{2-x}$. **7.** $(-1; -6)$, $(1; 4)$. *Указание.* В искомых точках должно быть $f'(x) = 9$.
8. 9. *Указание.* Найдите последовательно высоту основания, высоту пирамиды, а затем ее объем.

Задачи устного экзамена

1. $\pm\frac{2}{3}$. *Указание.* Заметьте, что $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ – взаимно обратные числа.
2. $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Упростив $\sqrt{1 - \sin^2 2x} = |\cos 2x|$, рассмотрите три случая: $\cos 2x = 0$, $\cos 2x < 0$, $\cos 2x > 0$.
3. $\left(\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6} + 2\pi m\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $k, l, m, n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Найдите $\cos(x + y)$ и $\cos(x - y)$.
4. $-\frac{7}{36}$, $\frac{35}{18}$. *Указание.* Имеются две возможности: $x_1 : x_2 = 10 : 1$, $x_2 : x_1 = 10 : 1$.
5. $(-\infty; -3] \cup [9; +\infty)$. *Указание.* Неравенство $f'(x) \le 0$, т.е. $3x^2 - 4ax - 4a^2 \le 0$, должно выполняться при всех $x \in [-6; 2]$. Для этого необходимо и достаточно выполнения условий $f'(-6) \le 0$, $f'(2) \le 0$.

Замечание. Вообще говоря, условие $f'(x) \le 0$ не гарантирует строгого убывания функции $f(x)$, так как это условие не исключает возможности равенства $f'(x) = 0$ на каком-либо промежутке (а тогда функция $f(x)$ постоянна на таком промежутке и не является строго убывающей). Однако в нашем случае $f'(x)$ – квадратичная функция, которая не может равняться нулю на каком-либо промежутке.

6. $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. *Указание.* Для функции $f(x)$ из условия неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ равносильно неравенству $x_1 < x_2$.
7. $\frac{69}{32}$. *Указание.* Зная $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$, можно найти $\sin x \cos x$, возведя это равенство в квадрат. После этого легко получить

$$\sin^6 x + \cos^6 x =$$
$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right) =$$
$$= 1 \cdot \left(\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x\right) = 1 - 3(\sin x\cos x)^2.$$

8. См. рис.15.
9. 60. *Указание.* Используйте равенство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.
10. 8. *Указание.* Используя условие задачи и теорему Пифагора, составьте систему из трех уравнений с тремя неизвестными – радиусом основания r, высотой конуса h и образующей конуса l.

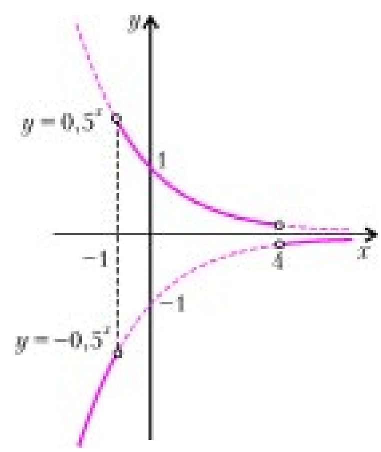


Рис. 15

Тест

1. 2). **2.** 4). **3.** 3). **4.** 4). **5.** 1). **6.** 3). **7.** 3). **8.** 30°. **9.** 2. **10.** $\frac{4}{9}$. **11.** 16. **12.** 10,5. **13.** 1. **14.** $\sqrt{2} - 1$.

Физика

Вариант 1

1. 2). **2.** 2). **3.** 2). **4.** 1). **5.** 1). **6.** 1). **7.** 2). **8.** 1). **9.** 2). **10.** 2). **11.** 1). **12.** 1). **13.** 2). **14.** 2). **15.** 1). **16.** 9 м/с. **17.** 4 м/с. **18.** 1,5 кг/м^3. **19.** 2,04 кДж. **20.** 781,25 пФ.

Вариант 2

1. 1). **2.** 3). **3.** 3). **4.** 2). **5.** 2). **6.** 2). **7.** 2). **8.** 3). **9.** 3). **10.** 2). **11.** 2). **12.** 3). **13.** 3). **14.** 2). **15.** 1). **16.** 1,5 с. **17.** 0,1. **18.** $25{,}2 \cdot 10^4$ Дж. **19.** $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ Ф. **20.** $2{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж.

НАПЕЧАТАНО В 2005 ГОДУ

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»; тел.: 930-56-48; e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»

Заказ №
Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10

Двенадцатилетний гроссмейстер

Наш цикл рассказов о шахматных вундеркиндах завершается портретом Сергея Карякина, которому принадлежит уникальный рекорд – он стал гроссмейстером в 12 лет! Впервые о Сергее стало широко известно в январе 2002 года, во время матча на первенство мира Пономарев – Иванчук. В пресс-центре юный шахматист был представлен как один из секундантов Руслана Пономарева, его земляк из украинского города Краматорска.

После успешного окончания матча Сергея спросили его мнение. Он задумался и честно признался: «Да, очень приятно, что все так завершилось, но, как бы я ни радовался за Руслана, он – мой будущий соперник. Ведь мне и самому надо становиться чемпионом мира». Вот такая удивительная целеустремленность, отличавшая нашего героя уже в 12 лет...

В пять лет, услышав по телевизору смешные слова «пешка превращается в королеву», Сергей спросил у отца, что это значит. Тот объяснил: речь идет о шахматных фигурах. Из любопытства сын поинтересовался, как они ходят... В пять с половиной мальчик впервые посетил шахматный кружок, а вернувшись домой, объявил маме, что жить без шахмат не может. Любовь с первого взгляда!

Свое семилетие первоклассник отметил весело – легко выполнил первый разряд. Затем стал чемпионом Крыма и занял второе место в первенстве Украины для малышей, а на следующий год он – уже чемпион страны. Особенно поражало тактическое чутье Сергея и феноменальная память: страницы вариантов он запоминал, как стихи.

И вот первый международный успех. В девять лет Карякин выиграл первенство Европы среди детей с редким результатом – 8 из 9. На рубеже веков Карякин участвовал в разных детско-юношеских соревнованиях, что называется, набивал руку. А в 2001 году, в одиннадцать лет, первый серьезный успех. Сергей – чемпион мира среди ребят до 12 лет. В том же году он завоевывает звание международного мастера.

В 2002 году происходит настоящая сенсация – Сергей покоряет гроссмейстерскую высоту! В 12 лет и 7 месяцев Карякин – самый юный гроссмейстер в истории шахмат. Видное место в Книге рекордов Гиннесса ему было обеспечено. И действительно, вскоре он получил из Англии официальный диплом.

Приведем две миниатюры вундеркинда, сыгранные в этот период.

Худяков – Карякин

Алушта, 2002

Английское начало

1. ♘f3 d5 2. c4 dc 3. ♕a4+ ♘c6 4. ♕:c4 e5 5. d3 ♗d6 6. g3 ♘ge7 7. ♗g2 ♗e6 8. ♕a4 f6 9. ♘c3 ♕d7 10. ♘e4 ♘f5 11. ♘:d6+ cd 12. e4 ♘fd4 13. ♗e3.

Белые потеряли много темпов, но все было бы хорошо для них, если бы не застрявший в центре доски предводитель. Нарушение принципа, знакомого каждому – в начале игры короля следует увести в укромное место, – оказывается гибельным. Безопаснее было 13. ♕d1, хотя 13... ♘:f3+ 14. ♕:f3 ♘d4 давало черным явный перевес Но теперь дело совсем плохо.

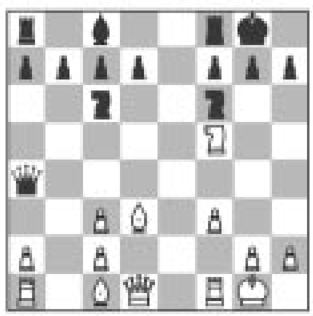
13... ♗h3! 14. ♗:h3. Единственный способ сопротивляться заключался в 14. ♘h4 ♗:g2 15. ♘:g2 ♘f3+ 16. ♔d1, хотя после ответа 16...d5! у белых мало радостей. **14... ♘:f3+ 15. ♔e2.** Сейчас после 15... ♕:h3 16. ♔:f3 они могли устоять, но... **15... ♘cd4+. Белые сдались.**

Карякин – Малинин

Судак, 2002

Шотландская партия

1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. d4 ed 4. ♘:d4 ♕h4 5. ♘c3 ♗b4 6. ♗e2 ♘f6 7. 0-0 ♗:c3 8. ♘f5 ♕:e4 9. ♗d3 ♕g4 10. f3 ♕a4 11. bc 0-0? Как ни странно, правильно вместо рокировки сдержанное 11... ♔f8. Теперь Сергей проводит блестящую комбинацию с жертвой двух фигур.



12. ♘:g7! :g7 13. ♗h6+! :h6. На 13... g8 решает 14. ♕d2 ♕h4 15. ♗g5 ♕h5 16. ♗:f6, а в случае 13... h8 белые просто берут на f8. **14. ♕d2+.** Крепость черного короля разрушена, а поскольку поле f8 занято, его удается загнать на край доски. **14... h5.** Или 14... g7 15. ♕g5+ h8 16. ♕:f6 g8 17. ♕g5+ h8 18. ♕h6 с быстрым матом. **15. g4+ ♘:g4 16. fg+ ♕:g4+ 17. h1 d6 18. ♖f6 ♕g5 19. ♗e2+ ♕g4 20. ♗:g4+. Черные сдались.** Жуткий разгром!

Став гроссмейстером, Сергей по сути превратился в профессионала – приглашения на турниры поступают со всего света, и график выступлений составляется чуть ли не на год вперед. Однако, в отличие от Фишера, Карякин не бросил школу, а лишь перешел на свободный режим и занимается по индивидуальной программе. Проблем с учебой не возникает.

В конце 2002 года Сергей влился в шахматную элиту, впервые сыграв в одном турнире с двумя чемпионами мира: Карповым и Пономаревым – своим недавним «подопечным». Дело происходило в Бенидорме, где двенадцать звезд сражались в быстрые шахматы. В итоге 1–2 места разделили Пономарев и Полгар, а 12-летний гроссмейстер был пятым.

Два года Карякин играл очень активно, и в 2004 году в Дортмунде ему удалось одолеть чемпиона мира Владимира Крамника. А в ноябре состоялась Олимпиада на Мальорке – историческая как для Украины, так и для юного Карякина. Он был заявлен в команде вторым запасным, но реально выступал на четвертой доске и показал феноменальный результат 6,5 из 7 – абсолютно лучший среди всех участников. Во многом благодаря ему Украина впервые завоевала олимпийское «золото». После возвращения домой 14-летний гроссмейстер указом Президента Украины был награжден орденом «За заслуги» III степени.

Хотя вне шахмат Сергей себя не представляет, но подумывает и о высшем образовании. После окончания школы его с распростертыми объятиями возьмут в любой университет на Украине. Но на всякий случай Карякин посетил Оксфордский университет. Кто знает, как дальше сложится жизнь?..

Кто из юных шахматистов в обозримом будущем может занять место Каспарова, лидера мировых шахмат на протяжении двадцати лет? На этот вопрос ответил сам российский экс-вундеркинд:

– Очень большие шансы у Карякина. Ему всего 15 лет, а играет он в солидные шахматы. У него хорошо поставлен дебют, практически нет слабых мест, все недостатки преодолимы. Он очень талантлив, и границ его потенциала не видно. Лет через пять ему будет вполне по силам взойти на вершину.

Е.Гик

Индекс
70465 – по каталогу "Роспечать"

Университеты мира на монетах и банкнотах

Из множества знаменитых немецких университетов
на монетах и банкнотах Германии изображены университеты
Гейдельберга (год основания - 1386), Лейпцига (1409), Тюбингена (1477),
Марбурга (1527), Йены (1558) и Берлина (1809).